COLLECTIO ET EXPLICATIO

THEOREMATUM

QUAE PRIMUM A GALILEO GALILEI DE MOTU CORPORUM TAM LIBERE CADENTIUM QUAM IN PLANIS INCLINATIS VEL PER ARCUS CIRCULI DESCENDENTIUM ET ASCENDENTIUM TRADITA SUNT.

DISSERTATIO

QUAM AUCTORITATE

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS

IN ACADEMIA VIADRINA

PRO SUMMIS

IN PHILOSOPHIA HONORIBUS

RITE OBTINENDIS

DIE XXXI M. AUGUSTI. MDCCCXL.

H. L. Q. C.

PUBLICE DEFENDET

AUCTOR

GUST. ADOL. RICARD. MAYWALD.

OPPONENTIBUS

GUIL. KOERBER, PHILOS. DR.

HUG. DITTRICH, PHILOS. CAND.

GUST. HENN, PHILOS. STUD.

ADJECTAE SUNT II TABULAE LITHOGRAPHICAE.

VRATISLAVIAE,

TYPIS GRASSII, BARTHII ET SOCII.

VIRO REVERENDISSIMO

GODOFREDO MAYWALD,

PATRI SUO DILECTISSIMO

HAS

STUDIORUM SUORUM PRIMITIAS

PIO GRATOQUE ANIMO

D. D. D.

AUCTOR.

PRAEFATIO.

Omnis philosophiae difficultas in eo versari videtur, ut a phaenomenis motuum investigemus vires naturae.

Newton.

Constat inter omnes, Galileum, temporum omnium acutissimum naturae investigatorem, physices recentioris parentem exstitisse, quia primus naturam vere accurateque delineaverit. Nisi a tali viro, qui ut Galileus im naturae perspiciebat multifariamque perspecta convenienter retinebat, systema illud constitui non potuit, quod naturae mirum quantum congruit atque ea penitus fundatum est. Qua de causa non iniquum mihi esse videtur, nostris adhuc temporibus in ejus docendi ratione omnem institutionem physicam poni ab iis certe, quibus judicium de ea re permitti possit; quamvis enim simplex et perspicuum ejus docendi genus sit, tamen opera ejus diligentissime tractentur necesse est, ut et ingenii ubertatem, quae in iis inest, percipiamus et divinationes nobis propositas satis intelligamus. Hoc idem de dissertatione dici potest, quam de motu locali conscripsit, qua dissertatione pleraque theoremata problemate nostro significata continentur. Quae dissertatio sola, licet haud magna operum ejus pars, auctorem immortalem reddere possit. His autem theorematis propositis hominibus notitiam omnino novam non solum attulit, sed eandem ipse ita conformavit, ut ea usque ad nostram aetatem amplificaretur tantum, non immutaretur. Sponte igitur apparet, quantum et mechanices historiae et notitiae de motu ipso intersit Galilei opera tractare, nedum perpendamus, quantum utilitatis nobis afferatur, tam egregii viri ingenium cognoscentibus.

Dissertatio subsequens hoc sibi vult, ut systema seu, ut ita dicam aedificium mechanices a Galileo constitutum, quatenus theoremata problemate nostro indicata complectitur, sive respexeris id universum sive singulas ejus partes, accurate digneque delineetur. Huic quasi picturae reddantur colores illi vegeti nitidique, qui tempore expalluerunt. Praeterea producat haec pictnra conclave

quoddam, rudem tantum antea materiem continens et ab alio demum architecto illi proposito accommodatum, cui jam Galileus id inservire volebat; qua forma inventa conclave illud totius aedificii symmetriae respondet.

Primum igitur Galilei systema et ratio, qua in illis theorematis tractandis utitur, constituenda deinde eo, quo par est, ordine explicanda mihi erunt. Qua in explicatione has fere rationes secutus sum:

I.

In illis theorematis, iisque plurimis, quae jam Galileus satis et perfecte probavit, haec quidem argumenta repetii, id tamen praecipua cura persecutus sum, ut argumenti momenta satis clare monstrem et omnino omnes difficultates amoveam, quae, quominus tam theoremata quam argumenta intelligantur, impedire potuerint.

II.

Illis deinde theorematis, quae ex sententia Galilei, id est secundum ejus systema, justiore argumento doceri potuissent, quam ipse Galileus docuit, licet argumentum ejus haud facile spernamus, meum argumentum Galilei argumento paucis adjunxi.

III.

Quum autem theoremata quaedam exstent, quibus in edocendis Galilei ratio ut ita dicam non ab omni parte comprobanda est, haec argumenta ubi fieri potuit, partim facili negotio emendavi, partim magis idonea substitui.

IV.

Iis denique theorematis, quae motum pendulorum explicant, quaeque Galileus argumentis docere non potuerat ideoque tanquam experientia observata nobis communicat, quamvis probari ea posse satis intelligeret, locum in libello assignavi idoneum et, ut mihi credere posse videor, ex sententia Galilei demonstravi. Haec theoremata sub voce illa supra dicta „conclavi quodam“ intellecta volo, sicuti „architectum alium“ neminem dico nisi Hugenium illum clarissimum.

V.

Momentum praeterea explicationis meae grave id quoque censeo esse, quod theorematum nexum diligentius doceo, ne ea

videantur esse materiae similia rudi et indigestae, sed ut justo ordine colligantur. Qua de causa unicuique capiti vel etiam minori dissertationis parti conspectum argumenti facilem intellectu non poteram non addere.

VI.

Nec silentio denique praeteribo, me hac in dissertatione argumenta quaedam attulisse, quae videntur omnino esse nova, quia in ea nusquam adhuc incidi, et alibi inveniri non posse credo, nisi in opere meae dissertationis simili, quum haec argumenta magis proprio cum Galilei systemate vinculo teneantur. Quae quidem ut aequo judicentur animo protuli. Gravissimum eorum id est, quod in operis fine conscriptum videbimus. Memoratu autem dignum id argumentum mihi videbatur esse, quia in regione geometriae elementariae versatur, sed nihilominus accurate et severe exponitur, quamquam theorema, quo nititur, ratione integrali sola adjuvante accurate demonstrari adhuc solebat. Postremo si spectas editionem operum Galilei, qua hoc in opere utendum mihi erat, negare non possum, aegre me tulisse, quod novissimam, Mediolanensem scilicet, adipisci non potuissem; ea vero, qua utebar, postea cum Mediolanensi collata, utramque in dissertationibus certe, quae ad opus meum pertineant, accurate secum consentire intellexi. Editio mea est Florentina, quae inscribitur ita:

„Opere di Galileo Galilei.“ In Firenze. MDCCXVIII.

INTRODUCTIO.

Conjectura, qua Galileus naturam motuum gravium corporum a se ipso primo inventam demonstravit, e paucioribus illis est, quae nostra aetate — liceat hoc contendere — invictae firmitatis indole imbutae sunt, quia omnia ad eam spectantia phaenomena cum illa plane congruunt. Quocirca hominum sagacitati illa campum novum aperuit, ubi haec uberrimam messem fecit. Calculis enim praesertim et differentiali et integrali detectis, illa conjectura ducti phaenomena quaedam esse a priori intelleximus, quae observationibus meris nunquam patefacta fuissent. Quis est qui licet diligentissimis et accuratissimis observationibus experientia sola invenerit isochronen, ejusque indolem perspexerit, quae tantam habet vim ad emendanda horologia cum perpendiculis? Quid? experientia doceri potuisset inesse huic lineae illam quoque indolem, cujus causa Brachistochrones ei tribuitur nomen? Quî vero possim omnia inventa enumerare quae cum notitia in illa conjectura fundata, aut arctiori aut remissiori vinculo conjuncta et ab illa excitata sunt? Quin etiam credam thesem defendi posse, cum legibus cadendi detectis sublimiorem quoque analysin detectam cohaerere; neque enim ignorari potest nonnulla a Galileo allata argumenta posita esse in principio, quo calculus differentialis nititur. Itaque natura ipsa clavem nobis dedit, qua instructi secretissima ejus conclavia penetrare poteramus. Summa illius conjecturae — vel potius dicam veritatis probatissimae — his paucis exprimi potest „gravitatem corporum solam esse causam, quod corpora cadant. Ad quod nimirum accedit, ut natura gravitatis apte definiatur.“ Corpora cadere, quia sint gravia, motum eorum voluntarium gravitate effici, antiquissimis jam temporibus notum erat, levissima observatione id docente. Sed ad Galilei usque tempora homines judicabant gravitatem esse ni-

hil nisi quoddam adjuvans, praesertim id, quod initium motus faceret; continuationi ejus festinationique, primis jam temporibus animadversae, alias causas substituebant, e.g. medium illud, per quod corpus movetur, quod pone id iterum conjungitur idque premit. De gravitatis natura non satis clare cogitabatur; quî enim causa recte perspici potuisset, quum effectus adhuc ignotus esset; nam qualis esset corporum cadentium motus, hac de re nihil nisi acceleratum esse motum homines sciebant.

Galileus rectam inivit viam hujusce rei cognoscendae, observationibus nempe in ipsam illorum motuum naturam inquirens, hac quaestione ante soluta: „quomodo corpora cadunt?“ Hac demum re cognita causam horum motuum scrutari adortus est; quo opere — ut supra dixi — hanc summam adeptus est: gravitatem scilicet esse solam causam cadendi, motum igitur gravitate sola effici et ut ita dicam, eum esse gravitatem ipsam liberam factam. Unde apparet effectum gravitatis jam non esse id factum merum, quod corpora cadant, sed potius causam cur ita cadant, ut revera cadunt, ex quo fit ut motus ejusdem corporis diversitas in diversitate gravitatis ejus se exercentis posita sit.

Deinde quamvis Galileus in dissertatione sua id maxime spectaret, ut leges cadendi detectas traderet experimentisque illustraret, quum summa ejus temporis quaestio in eo versaretur, ut indoles motuum localium geometrica indagaretur, causa eorum neglecta, tamen hae leges hac demum re firmari possunt, ut earum consensus cum natura illius potestatis demonstretur, qua illi motus efficiuntur. Quae quidem dissertatio subsequens latius exponet.

Itaque non ineptum mihi esse videtur, antequam theoremata quaestione nostra indicata argumentis doceam, hac in introductione afferre, quae Galileus ipse de illius potestatis natura tradidit, et theoremata, quae hac de re conscripsit, explicare. Continet ea dissertatio, quae ita inscribitur: „Della scienza meccanica e dell'utilità, che si traggono dagl'instrumenti di quella,“ quae in fine I. voluminis editionis meae legitur inde a pag. 597 usque ad pag. 622. Hanc dissertationem Galileus Patavii in usum discipulorum scripsit, quo compendio in lectionibus usus esse videtur, id quod propter astrictum breveque dicendi genus jam ex illo scripto concludi potest. Disserit hoc in libello de theoria instrumentorum mechanicorum, initium inde capiens ut rationes, quae moli cum

potestate movente communes sunt, demonstret, unde sequuntur explicationes generales, quae ad utilitatem pertinent a machinis allatam. Quo in opere hac fere via incedit.

Quatuor rerum, inquit, hic ratio habetur; primum ponderis, quod ex alio in alium locum transferendum est; altera est vis seu potentia, qua movendum est, tertium spatium percurrendum, postremum denique tempus, quod hac operatione consumitur, quodque congruit cum motus velocitate, cum determinet, altero motu alterum esse velociorem, si alter eorum idem spatium breviori tempore emetiatur. Quodsi moles quaelibet potestate constituta per spatium certum moveri debet, dubitandum non est, quin hoc fieri possit; quantulacunque enim potestas est, moles certe in partes potestate non majores dividi poterit; quae partes dum singulae deinceps promoventur, tota denique moles usque ad terminum propositum perferetur, idque minore vi, sed ea eundem motum idemque spatium identidem percurrit, quod moles semel tantum emetitur. Unde apparet potestatis velocitatem totidem partibus majorem esse mole, quot moles ipsa potestate major sit, quum eodem tempore, quo vis movens spatium datum identidem percurrerat, mobile ipsum hanc eandem viam semel tantum emensum sit. Hac ratione omnino naturali magnus ille renisus minore vi superabatur. Naturae contra non conveniret, si vis molem majorem eadem cum velocitate, quam ipsa habet, movisset, id quod fieri nullo pacto potest, neque per ullam machinam effici poterit. Sed etiam ad machinas pertinet haec lex: ut scilicet vis quaedam hac sola conditione pondus majus movere possit, si ejus velocitas toties major mole est, quoties ponderis resistentia vincit vim. Machinis autem adjuvantibus moles tota unâ in locum certum transferri potest, ea igitur dividatur non necesse est.

Proinde Galileus, licet in universum tantum, ostendit, quando machinae adhibeantur, quemque finem spectent, qualem e. g. hunc esse videmus, ut aliqua potestas movens recte dirigatur. Quibus expositis ad naturam gravitatis observandam pergit, idque hac de causa, quod instrumenta mechanica huic praecipue fini adhiberi soleant, ut corpora gravia moveantur. Hujus partis explicatio proposito meo imprimis respondet. Placuit autori demonstrationibus hanc rem tranctantibus antecedere definitiones et suppositiones adjuvantes, quae jam sequuntur.

Definitio I.

Gravitas est propensio se deorsum movendi, quae in corporibus inest et e materiae, ex qua constant, multitudine vel majore vel minore pendet.

Definitio II.

Momentum est propensio descendendi, non solum gravitate mobilis, sed etiam dispositione, in qua corpora gravia invicem versantur, effecta. Quod momentum si spectaveris, saepe videbis, aliud corpus cum alio multo graviori corpore in aequipondio esse, sicuti in statera a pondere minimo molem praegrandem tolli vides, non excessu gravitatis, sed potius quod longius abest a puncto, de quo statera dependet, quae distantia juncta cum gravitate ponderis parvi, huic ponderi momentum impetumque impertit, quocum superare potest corporis alterius multo gravioris momentum. Momentum igitur recte dicemus esse impetum descendendi, compositum e gravitate, dispositione aliisque rebus, quibus ejusmodi propensio effici potest.

Definitio III.

Centrum gravitatis quovis in corpore id punctum est, circa quod jacent partes aequalium momentorum, ita ut dextrae partes cum sinistris, anteriores cum posterioribus, superiores cúm inferioribus in aequipondio versentur, si fingimus hoc corpus ex illo puncto suspensum esse. Hoc idem punctum se conjungeret cum centro generali, i. e. cum centro terrae, si sine impedimento posset descendere.

Suppositio I.

Quodvis grave, quatenus ex ipso pendet, deorsum ita se movet, ut centrum gravitatis ejus non relinquat lineam rectam, quae interest inter punctum, in quo hoc centrum motu ineunte versabatur, et inter commune gravium rerum centrum. Manifestissima haec est suppositio, quod quatenus hoc centrum cum communi centro conjungi studet, necesse est, impedimentis, amotis, id assequi tendat per lineam brevissimam, i. e. rectam. Praeterea supponamus,

Suppositio II.

omne corpus grave maxime gravare super centrum suum gravitatis, in quo sicut in receptaculo quodam omnem impetum, omnem gravitatem et omnino omnia momenta conjungat.

Suppositio III.

Supponimus denique, gravitatis centrum corporum duorum aeque gravium in medio esse illius lineae rectae, quae centra amborum corporum secum conjungit; qua de causa pondera duo aequalia aequalibus distantiis suspensa aequipondii punctum in fulturae puncto habebunt.

Ut igitur e. g. in figura 1 sit distantia $CE =$ lineae ED, utque in punctis C et D duo pondera aequalia A, B suspensa sint, existimamus punctum aequilibrii esse in puncto E, quum non sit, quod potius in hac, quam in illa ejus parte jaceat. —

Sed nobiscum reputemus, necesse esse distantias metiamur perpendiculis, quae e suspensionis puncto F demissa sunt ad lineas, quae de centris gravitatis ponderum A, B monstrant ad commune centrum corporum gravium; quodsi igitur ED ad EF ferretur, pondus B cum pondere A non amplius in aequipondio esset, siquidem ut antea solum punctum E fultum est. Qua de re ut nobis persuasum habeamus, simplex constructio geometrica efficiet. Dimidiemus lineam CF, qua centra ponderum A et I conjunguntur, in puncto G et ex hoc puncto usque ad lineam aequam CD verticalem lineam GH describamus, tum e nostra sententia G commune est gravitatis centrum ponderum a C et F dependentium aequalium A et I; itaque si aequilibrium efficiendum est, aut punctum G aut punctum H, verticaliter sub eo situm, fulciendum erit. Facile autem est intellectu, hoc punctum H aequali distantia abesse a lineis CA, FI, quae centrum terrae spectant, quum enim $GH \parallel FK$, erit

$CG : GF = CH : HK$, cumque

$CG = GF$ ex constructione, erit $CH = HK$.

Nota. Itaque non difficile est in linea curva data $AMNB$, fig. 2, de cujus punctis extremis A, B duo aequalia pondera P, Q dependent, inventu id punctum, quod fulciri debet, ut aequilibrium efficiatur. Quo consilio linea AB tantum describatur, descriptaque dimidietur et a puncto C perpendiculum demittatur. Punctum H, in quo perpendiculum lineam curvam secat est illud punctum aequilibrii, quod desiderabamus.

His praemissis definitionibus conjecturisque autor ratione demonstrativa machinarum theoriam exponendi facultatem sibi datam esse videt; quo munere fungens exorditur a theoria vectis, qua omnes reliquae machinae nituntur. Quum mihi minime pro-

posuerim totam hanc dissertationem jam commentari, sed eorum tantum theorematum rationem praecipuam habiturus sim, quae naturam gravitatis ejusque agendi modum latius explicant, quia iisdem in dissertatione sequente „de motu“ opportune uti potero, in insequentibus nonnisi de plani inclinati theoria et de vectis theoria, qua illa nititur, disseram.

Galileus altera jam definitione exposuit apud stateram pondus, quo longiori a fulturae puncto intervallo suspensum sit, eo majus momentum adipisci, duo igitur pondera secum in aequilibrio esse, si in distantiis suspensa sint, quibus ratio inversa ponderum ipsorum est, cum secundum definitionem tertiam aequilibrium exsistat, si momenta paria sint. Hanc rem argumento etiam illustrat, quod hoc theoremate nititur: „velocitas motus momentum mobilis eadem ratione auget, qua velocitas ipsa augetur;“ quod theorema natura ita firmatum est, ut nostra adhuc aetate axioma, quo aliae theses demonstrantur, adhibeatur. Adjuvante machina, quam vocant, libramentaria experimento maxime idoneo veritatem hujus theorematis docere possumus. Quod vero attinet ad argumentum theorematis supra propositi, quod argumentum theoremate modo explicato nititur, gravissima ejus momenta jam ostendam. In fig. 3 linea *ACB* significet libram brachia inaequalia habentem, cujus hypomochlion sit *C*, et in cujus finibus *A*, *B* pondera suspensa sint, quae in aequilibrio versentur, primum apparet, si momentum vel minimum ponderi *B* addatur, statim motum fieri, qua de causa necesse non sit dignoscamus molem, quae teneatur, a mole, quae moveatur. Quodsi motum consideramus, quem mobile *B* in *E* descendens et mobile *A* in *D* ascendens facit, invenimus spatium, quod mobile *B* emetitur, ad spatium, quod pondus *A* eodem tempore percurrit, eandem rationem habere, quam distantia *BC* ad distantiam *AC*, quia longitudines arcuum similium eandem rationem habent, quam radii circulorum. Velocitas mobilis *B* ad velocitatem molis *A* eandem igitur rationem habet, quam *BC* ad *AC*. Itaque cum jam supra viderimus, velocitatem potestatis ad velocitatem molis eandem rationem habere, quam moles ipsa ad vim [pag. 599. Dal che appare, la velocità della forza essere stata tante volte superiore alla resistenza del peso, quanto esso peso é superiore alla forza e. c.], inde concludere possumus ut, si pondus *B* sufficere debet ad molem *A* movendam aut saltem in quiete retinendam,

haec pondera disparem rationem habeant, quam distantiae, in quibus suspensa sunt. Cujus conclusionis ut firmitas plane demonstretur, significemus pondera literis A, B et velocitates iis respondentes literis v, V, conclusioni nostrae hanc formam esse videmus:

$$\begin{array}{c} V : v = BC : AC \\ V : v = A : B \\ \hline A : B = BC : AC. \end{array}$$

Hoc in argumento a Galileo deducto omnino nihil desideramus; tamen aliud hujus theorematis argumentum non possum non proponere, quod mihi hanc ob causam non ineptum esse videtur, quia conjecturis a Galileo ipso allatis, scilicet secunda et tertia nititur.

Primum quidem demonstro, si theorema „apud vectem aequilibrium effici, si pondera inversam rationem habeant, quam distantiae eorum ab hypomochlio“ ea conditione verum sit, ut ponderum ratio sit $= 1 : n$, eandem quoque legem valere si ratio sit $= 1 : (n + 1)$.

In figura 4 sit punctum gravitatis ponderum P et nP, in A et B suspensorum, in puncto C ita ut secundum propositionem $BC : AC = 1 : n$ sit, itaque si C fulciatur aequilibrium adsit.

Secundum alteram suppositionem: „quodvis corpus grave maxime gravitat super centro gravitatis atque in eo omnem gravitatem colligit“ pondera A et B in puncto C omnem gravitatem congerent, itaque hoc in puncto cum pondere $= (n + 1) P$ prement, ita ut, si fulturam puncto C eripueris, puncto C pondus applicetur necesse sit, quod in oppositam directionem vim exserat, quam pondera A et B, ut vectis quietum se teneat; idque pondus propter causam allatam $= (n + 1) P$ esse oportebit. — Quod ubi factum est, fingas lineam AB usque ad D productam, $BD = CB = 1$ factam et in singulis punctis C, D pondus suspensum, quod sit $= (n + 1) P$, secundum conjecturam tertiam commune gravitatis punctum horum duorum ponderum in B erit, quo igitur in puncto ea pondus $= 2 (n + 1) P$ in unum congerent; quodsi id fulciverimus, aequilibrium conservabitur.

Figuram nunc plane expositam considerantes videmus in puncto C duas potestates easque oppositas vim exserere, quarum

effectus communis eandem ob causam nullus est. Quodsi cogitamus eas abesse, tres tantum potestates vim exserentes adsunt, in puncto A pondus $= P$, in D pondus $= (n+1)P$ et in hypomochlio B pondus $= nP$. Quum igitur, sicuti inveneramus, pressus in hypomochlion sit $= 2(n+1)P = (2n+2)P$, idem manifeste tantum $= (n+2)P$ erit, pondere nP, in eo suspenso, detracto. Stateram ergo construximus, cujus finibus pondera adhaerent, quibus ratio est $1:(n+1)$, quorumque distantiae ab hypomochlio rationem inversam $(n+1):1$ habent, quia $DB = CB = 1$ et $AB = AC + CB = (n+1)$. Quoniam autem, ut demonstratum est, aequilibrium consistit, legem, pro ratione $1:n$ supra propositam, esse justam ea quoque conditione ostendimus, si pondera habent rationem $1:(n+1)$. Commemoro adhuc secundam suppositionem, supra dictam, hac quoque conditione firmatam esse, quia invenimus, hypomochlio B pressum $= (n+2)P$ sustinendum esse, qui aequalis est summae ponderum punctis A et D adhaerentium.

E tertia suppositione apparet, thesem nostram rectam esse pro $n = 1$, unde secundum modo demonstrata statim concludere possumus, rectam eam etiam esse pro $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.... et quae sunt alia ejusmodi, itaque pro unoquoque n, qui numerus integer est, secundum concludendi formam bene notam, quae in doctrina de combinationibus saepissime occurrit.

Jam non dificile est demonstrare, punctum gravitatis duorum ponderum A et B (vid. fig. 5), quibus ratio est $m:n$, esse in C, si sit $AC:BC = n:m$. Sequitur

Argumentum.

Producatur linea AB ultra puncta extrema A, B usque ad D et E, DC fiat aequalis $CE = m.AC$, vel, quod idem est $= n.CB$, quia ex $AC:CB = n:m$ sequitur $m.AC = n.CB$, punctoque C fulto in singulis punctis D, E pondus $= 1P$ suspendatur, quibus peractis aequilibrium efficietur. Cum enim pondera A, E rationem habeant $m:1$, eorumque ab hypomochlio distantiae respondentes AC et CE ex constructione eandem rationem habeant, quam $AC : m.AC = 1:m$, haec in aequilibrio erunt pro hypomochlio C, secundum argumentum praecedens. Ex altera parte et pondera B et D pro eodem hypomochlio in aequilibrio versantur, idque eadem de causa, quia eandem rationem

habent, quam $n:1$, i.e. rationem inversam, quam distantiae BC, CD. Quatuor igitur pondera simul invicem in aequilibrio versantes, in puncto C gravitatem omnem in unum congerunt. Pondera autem duo sibimet aequalia D et E jam in aequilibrio sunt, quia aequalibus distantiis ab hypomochlio absunt (Suppos. III), quae si detraxerimus, aequilibrium non turbabitur, sed pressus tantum imminuetur, qui ad hypomochlion vim habet. Supersunt igitur duo tantum pondera A et B, quae hac de causa se in aequilibrio retinent.

Itaque in universum demonstratum est, duo pondera se invicem in aequilibrio retinere, si in distantiis ab hypomochlio suspensa sunt, quae inversam rationem habent, quam pondera; sed necesse est addamus, illas distantias nos metiri solere perpendiculis quae ab hypomochlio ad eas lineas demittantur, quae ponderum centra cum centro generali conjungunt.

Quodsi in fig. 6 contemplamur lineam ACB, quae in puncto C dimidiata et fulta est, atque in cujus punctis extremis A, B duo pondera aequalia G, H suspensa sunt, eadem se in aequilibrio retinentia videmus: sin vero brachium CB in situm CD transponimus, idem pondus H in puncto D non amplius pondus A sustentare poterit, quia ejus ab hypomochlio distantiam per lineam CF metiri debemus. Hoc idem jam supra monstratum est in conjectura III, jam nunc in hoc solum inquiremus, quam rationem habeat momentum ponderis H in puncto D ad momentum ejusdem ponderis in B.

Quod ut assequamur quaerendum est, quantum sit pondus K, quod in A vim exserens suspensum in D pondus in aequilibrio tenet, si C fultum est. Si describimus lineas AD et $CM \parallel DF$, apparet pondera K et D in aequilibrio esse, si punctum eorum gravitatis in M est; si res ita se habet, hae rationes efficiuntur $K:H = DM:AM$, cumque AM ad MD eandem rationem habeat quam AC ad CF sive BC ad CF, erit $K:H = CF:BC$; ergo $K = \frac{CF}{BC} \cdot H$. Cum momentum ponderis H in D eandem rationem habeat ad momentum hujus ponderis in B, quam K ad $G = K:H$, momentum hujus ponderis in D aequale tantum erit CF, si momentum ponderis H in B literis BC notamus. —

Omissis capitibus in dissertatione Galilei nunc sequentibus „della stadera e della leva,“ „dell'asse nella ruota e dell'argano,“

„della taglie,“ incipiam theoriam plani inclinati, qua autor cochleae theoriam fundat, et quam pag. 615—618 et 620 constituit.

Dubitari non potest, quin quodvis corpus grave, modo ne sit impeditum, ad centrum tendat et non solum per lineam verticalem cadat, sed, si aliter fieri nequit, per quamvis aliam lineam, quae quodam modo in centrum inclinet, paullatim descendat. In plano demum prorsus aequo mobile respicit neque motum neque quietem, quamobrem vel minima potestate moveri potest; si autem idem mobile transcendere deberet planum acclive, resisteret, quia in motum oppositum inclinatur; eaque vis eo major sit necesse erit, quo acclivius illud planum est.

Quodsi in fig. 7 mobile *G* ponitur in linea *AB*, quae parallelos est cum horizonte, indifferens erit et circa motum et circa quietem, ideoque minima vi moveri poterit; in planis autem inclinatis *AC*, *AD*, *AE* jam resistet, quae repugnantia eo major est, quo magis id planum inclinatur, major igitur erit in *AD* quam in *AC*, major etiam in *AE*. Quae repugnantia maxima erit, si mobile per lineam perpendicularem attollere volueris. Inquiramus nunc in rationem virium, quibus idem pondus trans plana diverse inclinata transferri possit. Hoc consilio, a punctis *C*, *D*, *E* ad lineam aequam perpendiculis *CH*, *DI*, *EK* ductis, patebit idem pondus trans *AC* minore vi moveri, quam per perpendiculum *AF* (in quo a vi ipsi pari vehi debet) ex ratione, secundum quam perpendiculum *CH* minus est, quam *AC*, et in plano quoque *AD* vim eandem ad pondus habere rationem, quam perpendiculum *ID* ad *AD*, et denique in plano *AE* eandem rationem, quam *KE* ad *AE*.

Cogitemus in fig. 8 circulum *AIC*, atque in eo diametrum horizontalem *ABC*, centrumque *B*, et duo pondera quibus momenta paria sint in finibus *A*, *C*, ita ut, si *AC* vectis vel statera sit, quae circa centrum *B* movetur, pondus *C* a pondere *A* sustentetur. Si vero fingimus brachium *BC* deorsum inclinatum ad *BF*, ita ut lineae *AB*, *BF* arcte cohaereant, momentum ponderis *C* non amplius aequale erit momento ponderis *A*, quoniam distantia est minor, quae inter punctum *F* et inter lineam *BI* est, quae linea gravitatis est per *B* ducta; si autem demittimus a *F* ad *BC* perpendiculum *FK*, momentum ponderis in *F* eadem magnitudine est, ac si suspensum esset in linea *KF*, et quoties *BK* minor est, quam *BA*, toties minus est momentum ponderis

F quam momentum ponderis *A*. Si pondus etiam magis inclinatur deorsum versus e. g. ad *BL*, non minus apparet, momentum ponderis *C* in puncto *L* ad momentum ponderis *A* eandem rationem habere, quam *BM* ad *AB*.

Itaque cognoscimus, quomodo in peripheria *CFLI* pondus *C* momentum et impetum descendendi amittit, si a lineis *BF*, *BL* tenetur. Tantum absit, ut pondus fingamus sustentatum radiis *BF*, *BL*, ut nobis proponamus circumferentiam *CFLI* esse superficiem omnino laevigatam et eidem mobili suppositam, id quod cum superiori considerandi genere congruit, quia mobile hoc vel illo modo idem spatium percurrit, neque interest, utrum inde e centro *B* radio circuli teneatur, an, expeditum quidem, in peripheria ire cogatur. Quodsi grave inde a puncto *C* per peripheriam *CFLI* descendit, in primo puncto *C* totum atque integrum momentum ei adhuc erit, quum nondum offendatur, neque hoc in primo puncto ejus propensio se movendi differt ab ea, quam habet in linea tangente verticali *DCE*; contra in puncto *F*, ubi plano supposito jam retardatur, momentum ejus imminutum est e ratione qua *BK* minor est quam *BC*; pariter atque in puncto *L*, ubi mobilis momentum ad momentum totum eandem rationem habebit, quam *BM*:*BC*. Quatenus igitur inclinatio circuli circumferentiae in *FL* minime differt ab inclinatione linearum tangentium *HG*, *ON*, licet nobis concludere, mobilis momentum per planum *HG* descendendi ad momentum totum, quod ei sit in linea verticali *DE*, eandem rationem habere, quam *BK*:*BC*; atque momentum in plano *ON* ad impetum totum eandem rationem habere quam *BM* : *BC*. Quum autem ob similitudinem triangulorum *BFK* et *KFH* ratio *BK*:*BC* seu *BK*:*BF* cum ratione *KF* : *HF* congruat, concludimus, rationem integri momenti, quod habeat mobile in linea verticali, ad id, quod habeat supra planum inclinatum *HF*, aequalem esse rationi linearum *HF*, *FK*, seu longitudinis plani inclinati ad ejus altitudinem. Ut ad figuram distinctiorem pergamus, qualis est fig. 9, momentum in inclinato plano *AC* ad momentum totale in *BC* eandem habet rationem quam *BC*:*AC*, unde sequitur ut vis, quae pondus *E* in plano *AC* sustentare potest, ad pondus ipsum eandem habeat rationem, quam altitudo plani inclinati ad longitudinem.

Neque considerandi modum silentio praeteribo, qui in omnibus instrumentis mechanicis offertur atque hoc principio nititur,

„ut quidquid potestatis iis adjuvantibus profecerimus ab altera parte ex tempore et velocitate amittamus;“ quod principium hoc nostro exemplo non firmari videtur, quum vis quidem hic multiplicetur, sed motor non majus spatium percurrat quam mobile. Quod si in triangulo *ABC* (vid. fig. 9) lineam *AB* putamus esse planum horizontale, *AC* autem planum acclive, cujus altitudinem perpendiculum *CB* metiatur, et ad mobile *E*, quod est in plano *AC*, chorda *EDF* alligata, ad punctum *F* vim quandam vel pondus applicaverimus, quod ad gravitatem molis *E* eandem habeat rationem, quam linea *BC* ad *AC*, qua de causa, ut demonstratum est, vis *F* molem *E* in plano *AC* sursum trahet — tamen mobile *E* super plano *AC* non minus spatium percurret, quam illud grave *F*. Hic autem notandum est, quamvis mobile *E* totam lineam *AC* eodem tempore percurrat, quo alteri gravi *F* opus est, ut per spatium tantundem descendat, tamen id mobile a centro terrae haud longius recessisse, quam spatium perpendiculare *BC* valeat, dum *F* per spatium verticale et aequale lineae *AC* delabitur. Atqui cum corpora gravia sine repugnatione motus ineant transversales, motus vero *AC* compositus ex transversali *AB* et verticali *BC* putari possit, profecto contendere possumus, viam potestatis *F* ad iter ponderis *E* conservare eandem rationem, quam habeat linea *AB* ad *CB*, vel pondus *E* ad pondus *F*.

His theorematis, quae in introductione tractentur oportuit, quia nostram quaestionem non directe spectant, dissertatio subsequens nititur. Jam accingar ad quaestionem ipsam expediendam, hanc introductionem annotatione finiens, quae exponit, quid causae sit, quod corporis cadentis cursum rectam esse lineam censeamus atque etiam in sequentibus censebimus.

Corporis cujusdam motui in universum quidem haec natura est, ut puncta ejus lineas describant, quae re vera inter se declinant, tamen quivis ejusmodi, ut Eulerus in celebri „tractatu de motu corporum rigidorum“ ostendit, in duos dividi potest motus, i. e. in motum progressivum purum et in motum gyratorium circa axem, qui motu pergente immutari potest. Sic autem Eulerus: (pag. 106). „Motus progressivus est, quo singula corporis puncta paribus celeritatibus secundum directiones inter se parallelas quovis temporis momento promoventur“ et pergit pag. 107: „Cognito ergo motu unius puncti omnium punctorum motus utpote illi aequalis

innotescit: singula enim puncta quovis temporis momento secundum eandem directionem et eadem celeritate feruntur, atque illud punctum. Sive ergo quid punctum lineam rectam sive curvam motu quocunque describit, omnia plane puncta in aequalibus lineis simili modo movebuntur."

Atqui casus corporum de quo hic agitur motus est ejusmodi progressivus, quamobrem ad motum totius corporis intelligendum sufficit ut noverimus motum unici puncti, e. g. centri gravitatis, in quo corpus omnem gravitatem, ideoque omnem movendi impetum conjungit.

Tractatus

de motu corporum gravium.

Motu nihil forte antiquius est in natura et circa eum volumina nec pauca nec parva a philosophis antiquissimis conscripta reperiuntur. Attamen qualis sit motus corporum gravium cadentium ante Galileum nemo jam prodidit. De natura hujus motus homines per plura saecula opiniones admodum paucas easque obscuras et errore infectas adepti erant. Primus Galileus cum hac in quaestione tractanda inventa gravissima assecutus est, tum eam ex omnibus partibus perspexit et expedivit. „De subjecto vetustissimo novissimam promovemus scientiam" his verbis aptissimis ad dissertationem conscribendam aggreditur; qua in dissertatione praecepta vera de hac re inventa ex artis lege tradit. Continetur haec dissertatio volumine II editionis, quae mihi in promptu est, et conficit alteram partem generalem operis ejus, quod inscribitur: „Discorsi e dimostrazioni mattematiche intorno a due nuove scienze, attenenti alla meccanica ed a i movimenti locali;" initium autem capit inde a pag. 573 a tertio dialogo. Sed jam in primo dialogo theoremata quaedam gravissima huc pertinentia tradita sunt, quae secundum quaestionem a me nunc sunt colligenda et explicanda, quod opus illico aggrediar.

Dissertatio ex diversitate materiae tractandae in tres partes divisa erit, in quarum

I. prima „de motu naturaliter seu uniformiter accelerato,"

II. in altera parte „de variatione accelerationis,“

III. in tertia denique parte „de motu pendulorum seu corporum per arcus circuli descendentium et ascendentium“ agitur.

Primum autem me convertam ad ea theoremata, quae et a Galileo dissertationi de motu locali praemissa sunt, quum in iis non solum posita sint argumenta thesium gravissimarum, sed etiam naturae cunctorum motuum vere recteque cognoscendae inserviant. Autor noster de iis proprio capite agit, quod inscriptum esse videmus

De motu aequabili.

Theoremata hoc in capite e definitione motus aequabilis deducta, quae de indole ejus agunt, a Galileo tam copiose sévereque demonstrata sunt, ut non necesse esse arbitrer, haec ipsa argumenta repetere, praesertim cum non directe pertineant ad id de quo disseram, sed tantum theoremata adjuvantia e phoronomia ducta putanda sint. Meum autem est, omnes difficultates amovere, quae quominus argumenta illa intelligantur impedire possint, deinde explicare, quomodo theoremata inter se conjuncta sint et qualis sit ratio ea demonstrandi et argumentis firmandi.

Definitionem memoratam autor ita exprimit: „Aequabilem seu uniformem motum intelligo eum, cujus partes quibuscunque temporibus aequalibus a mobili peractae sunt inter se aequales,“ qua e definitione secundum principium „totum quodvis partibus suis majus est“ haec quatuor axiomata deducuntur:

A x i o m a I. Spatium transactum tempore longiori in eodem motu aequabili majus est spatio transacto tempore breviori.

A x i o m a II. Tempus, quo majus spatium conficitur in eodem motu aequabili, longius est tempore, quo conficitur spatium minus.

A x i o m a III. Spatium a majore velocitate confectum tempore eodem majus est spatio confecto a minore velocitate.

A x i o m a IV. Velocitas, qua tempore eodem conficitur majus spatium, major est velocitate, qua conficitur spatium minus.

Optandum erat, ut autor significationem „velocitas“ posterioribus duobus axiomatis comprehensam ante definivisset, quia ex hac definitione veritas tam illorum axiomatum, quam sequen-

tium propositionum pendet. Hoc vero illi minime opprobrio esse potest, quia illam notionem superioribus jam commentationibus licet non plane ac diserte, tamen ita tractavit, ut dubitari non possit, quid ea significetur. Sed hoc quoque loco et is, qui illam notionem omnino non nosset ex sequente II et III propositione definitionem aptam facillimo negotio deducere posset. Praeterea notandum est, hanc notionem antiquissimis jam temporibus in sermonem vulgarem transiisse atque ab omnibus intelligi. Quum autem, ut infitiandum non est, ubi explicationes latiores de motu aequabili proponuntur, ibi etiam locus datus sit illi notioni adumbrandae, liceat mihi hoc nunc facere.

Notio motus aequabilis infinitum inter se differentium motuum singularium numerum complectitur, quum in eo id tantum respiciatur, quod temporibus aequalibus aequalia percurrantur spatia, qua in re non constituitur, quanta revera sint haec spatia inter ipsa aequalia. Quodsi in motibus duobus uniformibus spatia temporibus semper aequalibus percursa, quod ad ipsa attinet, diversam magnitudinem habent, etiam motus eam ob ipsam causam diversi sunt. Alia autem discrepantia motibus aequabilibus non sunt, siquidem hoc negligimus, quod fortasse diversis in locis vel temporibus diversis peragantur. Ubi enim magnitudo spatii tempore certo percursi data est, etiam motus, dum sit aequabilis, singulariter constitutus est. Tempus, quo spatium illud conficiebatur, manifeste simul datum esse debet, quum magnitudo hujus spatii in eodem motu diversa sit, prout temporis spatium immutatur, quod e. g. duplici tempore duplex spatium conficitur. Itaque non sufficit ad motum aequabilem constituendum dicere, ab eo temporis partibus semper aequalibus decem pedes percursos esse, qua dictione nihil certi significatum est; tempus quoque indicari debet, quo decem pedes confecti sunt. Hac vero conditione nihil refert, utrum dicas decem pedes duobus minutis secundis, an viginti pedes quatuor minut. secund., vel 5 pedes 1 min. sec. esse confectos, quum omnia haec indicia secum consentiant, quod in eodem motu aequabili tempus ad spatium hoc tempore percursum constantem rationem habet. Haec eadem ratio notione „velocitas“ sive „celeritas“ significatur, quae si illa ratio eodem semper indicatur tempore, per spatium tantum hoc tempore percursum, vel per numerum abstractum significatur, qui indicat, quoties hoc spatium mensuram longitudinis quandam,

quae pro unitate habeatur, contineat. Quod singuli hujus rationis termini, cujus ut ita dicam numerus exponens velocitas est, magnitudines sint dissimiles, mirari non debemus, quoniam non agitur de divisione revera perficienda.

Quod autem attinet ad velocitates diversorum motuum aequabilium, manifestum est, eas ejusdem generis magnitudines putandas esse, quia apte dici potest, velocitatem quandam esse minorem aut majorem, vel duplo majorem alia velocitate, si spatium tempore certo confectum in primo motu minus aut majus vel duplo majus sit, quam spatium eodem tempore percursum in secundo motu (vid. Axiom. III et IV). Quid sit velocitas in motu aequabili facillime demonstrari potest, ut jam supra dixi, minime vero in talibus tantum motibus illa notio vim habet. Quomodo huic notioni et in motibus inaequabilibus locus sit, Eulerus in introductione in tractatum jam supra memoratum de motu corporum rigidorum, breviter quidem, ita explicat:

„Haec celeritatis notio, ex motu aequabili petita, etiam ad motum inaequabilem patet. Uti enim in motu aequabili celeritas semper est eadem, ita in inaequabili mutari est intelligenda. Mox enim ostendemus in omni motu, utcunque sit inaequabilis, minima spatii elementa singula motu aequabili percursa concipi posse, sicque in quovis spatii puncto celeritatem assignare licet, qua scilicet minimum spatiolum ibi conceptum percurritur. Atque hinc celeritas, tanquam indoles quaedam peculiaris motus a descriptione spatii non pendens considerari potest, cum in quolibet spatii descripti puncto certa detur celeritas. Ex quo celeritas etiam ita definiri posset, ut sit talis motus modificatio, qua is certum spatium certo tempore describendum determinetur."

Ostendam praeterea quam viam nobis pandat calculus differentialis, quam ingredientes velocitatem in motibus inaequabilibus possimus determinare atque in rationem inducere.

Ut cujusdam motus naturam intelligamus, praeter formam et magnitudinem spatii confecti etiam pro unoquoque tempore locum significare possimus oportet, ubi mobile versetur, i. e. magnitudinem spatii percursi. Quodsi tempus, ex certo quodam temporis momento, e. g. ex initio motus praeterlapsum, litera t, spatium autem hoc tempore confectum litera s notaverimus, necesse erit, siquidem motum nos intellexisse dicere possimus, pro quovis valore in t respondentem valorem in s noverimus; quem

hac sola conditione nosse possumus, si universam determinationem quantitatum s et t novimus, vel in formula $s = f(t)$ formam functionis f. Quatenus igitur omnes motus, quos calculo subjicimus, vel adhuc ignotos, tales putamus, quales cognosci possint, hactenus simul in quoque eorum illam conditionem, qua a se invicem pendent, i. e. $s = f(t)$, quantitatum s et t revera esse credimus, eaque horum motuum naturam significamus.

Haec est illa aequatio, qua et ad computandam cognoscendamque velocitatem adjuvamur. Quatenus enim hinc velocitas in motibus aequabilibus aequalis est spatio per tempus diviso secundum sententiam supra dictam, illinc autem in motu quoque inaequabili partes admodum parvae, vel potius dicam infinite parvae aequabiles esse putari possunt, hactenus manifestum est, posse velocitatem exprimi auctu infinite parvo spatii diviso per temporis elementum eodem pertinens, ergo per quotum differentialem $\frac{ds}{dt}$, cujus valor, adjuvante calculo differentiali, facile invenitur. Redeam ad dissertationem Galilei.

Axiomata supra allata sex insuper propositiones sequuntur, quarum argumentum et ratio inter ipsas veritasque ex his apparet.

Si in quolibet motu aequabili spatium, quod t unitatibus temporis percurritur, numero s notaverimus, secundum adhuc explicata velocitatem v ponere poterimus $= \frac{s}{t}$; deinde si in alio motu aequabili quantitatibus t, s, v respondentes quantitates literis T, S, V notaverimus, pro hoc altero motu aequationem $V = \frac{S}{T}$ inveniemus.

Inde efficiuntur, si sensim ponimus $v = V$, $t = T$, $s = S$, hae proportiones tres:

I. Si est $v = V$, erit et $\frac{S}{T} = \frac{s}{t}$, ergo $S : s = T : t$, id quod propositio I contendit. Ea autem haec est:

„Si mobile aequabiliter latum, eademque cum velocitate, duo pertranseat spatia, tempora lationum erunt inter se, ut spatia peracta.“

II. Si est $t = T$, erit $\frac{1}{t} = \frac{1}{T}$ atque ita $\frac{v}{s} = \frac{V}{S}$; ergo

$v:V=s:S$, quae est indoles secundi theorematis: „Si mobile temporibus aequalibus duo pertranseat spatia, erunt ipsa spatia inter se ut velocitates. Et si ipsa spatia sint ut velocitates, tempora erunt aequalia."

III. Si denique ponamus $s=S$, erit $vt=VT$; ergo $t:T=V:v$, quod est tertium theorema:

„Inaequalibus velocitatibus tempora velocitatibus e contrario respondent, si spatia peracta sint aequalia." — Postremo autem pro duobus quibuslibet motibus aequabilibus proportiones sequentes valent, quae ex aequationinibus $v=\frac{s}{t}$, $V=\frac{S}{T}$ directe deductae itaque ampliores sunt, quam quas modo proposuimus; eae sunt hae:

1) $s:S=vt:VT$ 2) $t:T=\frac{s}{v}:\frac{S}{V}=sV:Sv$ et 3) $v:V=s.T:S.t$. Veras esse eas ab autore in tribus propositionibus posterioribus demonstratur, quae sunt hujusmodi:

Theor. IV. „Si duo mobilia ferantur motu aequabili inaequali tamen velocitate, spatia, temporibus inaequalibus ab ipsis peracta, habebunt rationem compositam ex ratione velocitatum et ex ratione temporum."

Theor. V. „Si duo mobilia aequabili motu ferantur, ratio temporum composita erit ex ratione spatiorum et ex inversa ratione velocitatum."

Theor. VI. „Si duo mobilia aequabili motu ferantur, ratio velocitatum ipsorum composita erit ex ratione spatiorum et ex inversa ratione temporum."

Itaque demonstratum est, quomodo haec theoremata, conditiones in quibus motus uniformes secum versentur explicantia, inter se connexa sint. Autoris autem demonstratio longe aliam formam habet, quam ea, quam modo attuli, quia is raro praetermittit vel facillima theoremata maxima cum severitate demonstrare, quae antecedenti demonstrandi genere deest.

Namque ut proportiones supra expositae re vera ex aequationibus $v=\frac{s}{t}$, $V=\frac{S}{T}$ sequantur, necesse est $\frac{s}{t}$ et $\frac{S}{T}$ sint verae fractiones; sed jam annotavimus de vera divisione temporis in spatium hic agi non posse. Quae quidem difficultas amota esse videtur, si $s, t, S. T$ numeris abstractis exprimantur, quod

vero si factum esset, v et V in aequationibus supra propositis non eae essent, quas velocitates vocant, quia velocitas non est numerus abstractus, sed ratio quaedam necessaria inter tempus et spatium. Tamen illo argumento uti licet, modo ante monstremus, etiamsi $\frac{s}{t}$ et $\frac{S}{T}$ non sint velocitates ipsae, tamen has dictiones esse significationes earum aptissimas, quibus liceat uti, si quo de ratione tantum duarum velocitatum agatur. Has difficultates Galileus prorsus evitat adhibita, parum quidem nota, tamen omnino justa definitione quantitatum proportionalium, qua adjuvante proportiones supra allatae nullo negotio deducuntur. Haec definitio jam apud Euclidem nobis occurrit. Est ea quinta libri quinti ejus elementorum. Galileus eam cum pluribus aliis theorematis huc pertinentibus et definitionibus proportiones spectantibus in singulari dialogo tractat, qui inscribitur: „Principio della quinta giornata del Galileo, da aggiugnersi all' altre quattro de' discorsi e. c.“ (vid. vol. II pag. 680 — 692). Hoc e dialogo jam ea breviter afferam, quae ad explicandam demonstrandamque illam definitionem sufficiunt, quam Galileus ita exprimit:

„Se delle quattro grandezze A, B, C, D gli ugualmente multiplici della prima e terza presi secondo qualunque multiplicità sempre si accorderanno nel pareggiare, o mancare, ovvero eccedere gli ugualmente multiplici della seconda e della quarta respettivamente, io dico, che le quattro grandezze A, B, C, D son fra di loro proporzionali.“ —

„La proporzione tra due grandezze — primum acutissime definitur — é un tal rispetto o relazione tra di loro, per quanto si appartiene alla quantità.“ Quantitas enim sine mensura nullo pacto potest cogitari, et ratio nihil est nisi quantitatum duarum conjunctio, quarum altera indolem mensurae habet, qua re altera quantitas mensurabilis fit. Quodsi quantitas d per mensuram c, pro fundamento habitam, tantadem invenitur, quanta alia quantitas b per mensuram aliam a (b et d non amplius absolutae putandae sunt, sed relativae vel mensae), illae quatuor quantitates vocantur proportionales. Hac definitione argumentum supra propositae nititur. Primum quidem ex ea concluditur, si illae quantitates a, b, c, d proportionales sint, i. e. b et d quod attinet ad mensuras a et c, quibus sicuti fundamentis utantur, aequales sint, illas, b, d, inter se aequales mansuras esse, etiamsi mensurae a et c

tantodem majores vel minores cogitarentur, secundum axioma: „si tota aequalia sunt, et aequales eorum partes aequales sunt, et id quoque e ratione inversa.“ Ergo ex $a:b=c:d$ sequitur 1) $ma:b=mc:d$. Simili ratione concluditur, etsi b et d tantodem majores ponantur, tamen eas, quod attinet ad earum mensuram, inter se aequales mansuras esse; vel ex $a:b=c:d$ vel $ma:b=mc:d$ sequitur 2) $ma:nb=mc:nd$, vel ut verbis utamur: Si quatuor quantitates a,b,cd proportionales sunt, et A,B,C,D proportionales erunt, si A et C aeque multiplicia primae et tertiae, B et D aeque multiplicia secundae et quartae significant. Praeterea in pag. 686 demonstratur, si quatuor quantitates A,B,C,D datae sint et A major sit illa, quae in locum ejus succedere debeat, ut quantitates proportionales fiant, A,C et B,D, quod attinet ad ipsas, aeque multiplicari posse e. g. mA, mC et nB, nD, cui rei haec indoles sit, ut $mA>mC$ et $nB<nD$ sit.

His e theorematis veritas definitionis supra propositae hoc modo facile deduci potest. Ut quantitates A,B,C,D proportionales non sint, itaque alterum membrum prius e. g. A majus sit ea quantitate, quae ad membrum sequens eandem rationem habeat, quam C ad D, secundum theorema antecedens quantitates A,C et B,D, quod attinet ad ipsas, aeque multiplicari possint, hac quidem qualitate, ut $mA>mC$, dum $nB<nD$ sit, id quod sumptioni repugnat.

Illa definitione argumentum primi et secundi theorematis nititur, quorum illud etiam in primo et secundo axiomate, hoc in tertio et quarto positum est. Tertiae propositionis argumentum, praecipue ex altera parte secundi theorematis, adjuvante prima propositione deducitur. Idem et de quarto theoremate dici potest; quintum tertia et prima propositione, postremum denique secunda et tertia nititur.

Itaque quominus horum theorematum argumenta a Galileo deducta intelligantur, nihil amplius impedimento est, qua de causa primam dissertationis „de motu gravium“ partem incipiam.

CAPUT. I.

De motu naturaliter seu uniformiter accelerato.

Quamvis gravium corporum motus infinite inter se differant, tamen omnes lege accelerandi admodum simplice nituntur, quae simplicissima cernitur in motibus, lineis rectis peragi solitis. Cujus legis cognitio fructus est quaestionum a Galileo, ut motus illos perspiciat, institutarum. Eam inprimis deduxit e motibus lineis rectis peragi solitis, quos experimentis exploravit et cognovit; eamque hoc e capite, quo natura horum motuum demonstranda est, universam perspiciemus. Primo notandum est casum verticalem liberum esse motum aequabiliter acceleratum, cujus definitionem autor his verbis exponit:

„Motum aequabiliter seu uniformiter acceleratum dicimus eum, qui a quiete recedens temporibus aequalibus aequalia celeritatis momenta sibi superaddit.“ Docendum igitur est, motus uniformiter accelerati qualitates hac e definitione deductas confirmari casu corporum; itaque primo qualitates ipsae ante deducendae sunt.

Quodsi rationem eorum habebimus, quae in praecedente capite de velocitatis notione attuli, definitio proposita perperam intelligi non potest; tamen nequaquam nihil attinere videtur Salviati, Sagredi, Simplicii, trium illorum academicorum disputationem, quae in Galilei dissertatione sequitur, diligentius considerare, quia plures de hac re observationes non negligendas continet.

Quum gradus velocitatis secundum ejus temporis rationem accrescant, quod ex initio motus praeterlapsum est, ita ut, si tempus licet aliquantulum augeatur, velocitas quoque paululo accrescere oporteat, manifestum est motum aequabiliter acceleratum esse motum continuo acceleratum, ideoque nullum, quantulumcunque sit, spatium ab eo uniformiter percurri.

Itaque in errorem incideremus, si velocitatem metiri vellemus spatio inaequaliter confecto respectu temporis, quo percurrebatur. Quo minus hoc spatium proponimus, eo minus quidem

vitium committimus, quod vero tunc plane cedit, si spatium ideoque et tempus infinite parva sunt.

Quodsi Sagredus pag. 578 definitionem in controversiam vocans: „Si mihi cogitatione fingo, inquit, corpus e quiete decidens, e. g. octonis arteriae pulsibus octonos gradus velocitatis assecutum esse, quaternis pulsibus quaternos, binis binos, singulis unum, dimidia pulsus parte dimidium velocitatis habebit gradum. Quatenus igitur tempus infinite dividi potest, illud corpus certo quodam tempore, eoque proximo a motus initio in tanta versabitur tarditate, ut singulis horis singulas lineas, immo etiam vel singulis diebus, et ut longius recedamus millibus fortasse annis unam lineam conficiat. Hoc cogitationem meam vincit; experientia enim docet corpus grave magna cum velocitate repente deferri;" — error, quo ducitur, nulla alia re efficitur, quam quod velocitatem spatio, quod tempore finibus circumscripto percursum est, metitur. Praeterea autem hic error opinione falsa quidem sed admodum simplice nititur. Quamvis enim tempus infinite divisum animo fingere possimus, tamen hoc idem re vera facere non possumus, quod temporis spatia admodum parva, e. g. minutae secundae octava pars, vel etiam minores temporis partes, nobis non amplius esse videntur temporis spatia, sed temporis momenta; mens enim nostra initium a fine talis temporis spatii dignoscere non potest. Atqui si revera constet, corpus e quiete decidens, quamvis omnes tarditatis gradus permeet, octava minutae secundae parte praeterlapsa, modicam jam habere velocitatem, mentem autem nostram hoc temporis momentum ab initio motus dignoscere non posse, fieri aliter nequit, quin corpora statim ex initio magna cum velocitate decidere nobis videantur.

Salviatus igitur Sagredi reprehensionem experimento naturae convenienti refutat, ex quo intelligitur, quomodo velocitatem in motibus inaequalibus arte physica scrutari possimus. Namque ille respondet: „Haec eadem difficultas me quoque initio vexabat, sed eam experientia, quam pro ea attulisti, adjuvante amovi et redargui. Ponas corpus grave in cedenti materia, pro certo affirmare possum, id sublatum et in materiam iterum demissum majorem impetum exerciturum esse, quam cum premeret simplice tantum gravitate.

Quo major altitudo fuerit, de quo corpus delatum est, i. e. quo major ejus velocitas fuerit, eo vehementior plaga illa erit.

Quanta enim cadentis sit velocitas, sine errore e qualitate et vehementia impetus concludemus. Quodsi corpus digito tantum transverso altius sustuleris, vis plagae certo non multo vehementior erit, ac si sine impetu in ea materia corpus posuisses, et vis ejus plane sentiri non poterit, si id corpus haud altius sustuleris, quam plagula in latitudinem patet. Ergo quum effectus plagae velocitate ferientis regatur, quis est, qui dubitet, quin motus tardissimus et velocitas minima sit, siquidem effectus ejus sentiri non possit?“ et quae sunt reliqua. Dignissima quam cognoscamus Sagredi dissertatio est, in qua de causa accelerationis rationem reddit; quae dissertatio offerebatur, cum Salviatus commemorasset, jacturam et deminutionem velocitatis ipsius corporis sursum ascendentis eadem lege fieri, qua auctum ejus si decidat. Causa illa accelerationis nulla est nisi gravitas, cujus indolem in introductione expositam videmus. Qua vero in introductione nondum de hac re sermo erat, quomodo gravitate sola motus efficeretur, quod ut cognoscamus, motus ipse excitatus cognitus esse debet. Gravitatis effectum esse accelerationem, hoc neglecto, intelligi potest, quia hac in re omnino omnium virium mechanicarum natura fundata est; qua vero lege haec acceleratio fiat, id a priori constitui nequit. Nunc demum, quum cognoverimus casum liberum corporum esse motum uniformiter acceleratum, nobisque dicere liceat gravitatem esse vim, quae corpora omnia continuo et pariter commoveat, ut ad centrum descendant, hujus naturalis potestatis indolem omnino perspectam habemus. Hac eadem de causa Galileus tantam operam conferebat in indolem hujus accelerationis detegendam, animo praesagiens, illam accelerationem, quum hinc gravitate efficeretur, illinc gravitas sola esset cadendi causa, lege simplicissima niti oportere.

Namque observationibus suis ductus naturam motuum, rectis lineis peragi solitorum, multo prius cognovit, quam legem eorum accelerationis, quae tum demum conclusionibus geometricis ea deduci potuit. Dissertationem autem suam conscribens ordine, ut par est, inverso rem tractat, atque ex accelerationis lege qualitates motus deducit.

Quanta vero cum difficultate, ea literarum inprimis mathematices conditione, qualis erat Galilei aetate, investigatio naturae accelerationis conjuncta fuerit, hoc documento esse potest, quod ipse Galileus, quamvis disquisitiones acutissimas instituisset, non

illico veritatem assecutus sed initio in errorem lapsus sit. Aperte profitetur (cf. pag. 581), se initio credidisse, accelerationem gravium cadentium in eo positam esse, quod velocitates augeantur e ratione spatiorum, per quae ea ceciderint, ita ut corporis impetus duplo major sit, si de duplice altitudine delapsum sit. Quam persuasionem omnibus cum viris doctis, quibuscum aut per literas aut coram colloqui solebat, judicandam communicavit, cui rei documento esse potest epistola quaedam, ut videtur, ad Marchese Guido Ubaldo dal Monte scripta Patavii a. d. XVII. Kal. Novembr. a. MDCIV. Qua in epistola haec scribit:

„Ripensando circa le cose del moto, nelle quali per dimostrare gli accidenti da me osservati, mi mancava principio totalmente indubitabilmente da poter porlo per assioma, mi son ridotto ad una propositione, la quale ha molte del naturale e dell' evidente, e questa supposta dimostro poi il resto: cioè gli spazi passati dal moto naturale essere in proporzione doppia de i tempi, e le altre cose. Ed il principio é questo, che il mobile naturale vadia crescendo di velocità con quella proporzione, che si discosta dal principio del suo moto; come v. g. cadendo il grave dal termine A fig. 10 per la linea $ABCD$, suppongo, che il grado di velocità, che ha in C, al grado di velocità, che ebbe in B, esser come la distanza CA alla distanza BA, e così conseguentemente in D aver grado di velocità maggiore che in C, secondo che la distanza DA é maggiore della CA."

Nec quisquam dubitavit huic opinioni fidem tribuere, sed omnes existimaverunt, in dubium vocari non posse et sine controversia concedendum esse, mobile grave descendens vires eundo acquirere. Galileus autem ipse brevi intellexit, hoc et falsum esse et fieri non posse. Hoc (cf. pag. 581) auxilio theor. II „de motu aequabili" demonstrare studet, sed ratione non satis apta. Cur enim esse non possit talis acceleratio corporum e quiete decidentium, haec sola causa est, quod tempus infinitum postuletur, ut corpus quiescens moveatur. Acceleratio ipsa neque omnino naturae repugnat, et effici potest modo re vera inceperit motus. Facillimo negotio hoc concludi potest ex observatione aequationis differentialis $\frac{ds}{dt} = ms$, qua talis motus nititur, qua in aequatione m constantem quantitatem significat.

Integrale ejus est $s = e^{(mt + c)}$, ubi s significat spatium tempore t confectum, e basin logarithmorum naturalium et c constantem quantitatem. Quodsi igitur pro $t = o$ etiam $s = o$ fieri i. e. corpus e quiete decidere debet, fit $o = e^{+c}$ sive $c = - \infty$, ideoque pro omnibus valoribus τοῦ t manebit $s = o$, i. e. motus nunquam incipi poterit. Si vero motum jam initium cepisse ponimus et exempli gratia pro $t = o$ spatium jam percursum aequale unitati mensurae longitudinis, erit et $c = o$ atque motus pro omnibus valoribus t realis erit.

Haec sufficiant ad explicandam tam definitionem motus uniformiter accelerati a Galileo propositam, quam ad disputationem trium illorum academicorum. In insequentibus ex illa definitione indoles universa illorum motuum sine impedimento arte geometrica demonstrari poterit. Quum autem hoc in capite etiam motus corporum per plana inclinata decidentium docendus sit, legem quoque naturalem explicemus necesse est, ex qua hi motus peragantur. Quam autor ita exprimit:

„Accipio, gradus velocitatis ejusdem mobilis super diversas planorum inclinationes acquisitos, tunc esse aequales, cum eorundem planorum elevationes aequales sint.“

Elevationem plani inclinati vocat perpendiculum, quod a summo hujus plani puncto ad planum horizontale, per punctum extremum ejus ductum, demissum est. Quodsi in fig. 11 linea AB parallela est cum horizonte, ad quem duo plana CA, CD inclinata sunt, erit CB communis eorum elevatio, atque autor contendit fore, ut, si idem mobile per lineas CA, CD e quiete cadat, (omnis scilicet frictionis nulla ratione habita) id in punctis A et D eandem velocitatem assecutum sit; ad quod addit, hunc velocitatis gradum tantum fore, quantus is, quem mobile per lineam verticalem CB libere cadens in puncto B assecutum erit.

Quatenus sententia hujus theorematis est enarratio legis, quae ad corporum casum in plano inclinato pertinet, argumento ei non opus esse videtur, cum confirmatio ejus hac conditione in eo tantum versari possit, ut demonstretur, quomodo qualitates illorum motuum ex eo deductae, cum experimentis consentiant. Galileus, quum hanc dissertationem conscriberet, ejusmodi eam esse revera credebat, ut eam principii indole imbutam proponeret atque demonstrari eam supervacaneum esse diceret. Quum vero, ut supra dixi, universam gravitatis naturam jam perspexe-

rimus, quae sola omnes omnium cadentium corporum motus efficit, confirmatio et demonstratio antecedentis theorematis jure postulari potest. Quam autor noster posteriori tempore adhuc attulit; continet eam dialogus trium academicorum inde a pag. 589 usque ad 592. Nec non ego ejus explicationem differam, donec qualitates motus uniformiter accelerati docuero, atque ad eundem locum pervenero, ubi Galileus supplementum illud inseruit; nunc vero mihi sufficit experimentum, ad nostrum theorema spectans, explicare.

Fingamus figuram 12 esse parietem perpendicularem in horizonte, et de clavo in eo fixo dependeat glans plumbea, unam vel duas uncias pondo, suspensa in tenui verticali filo *AB*, quod duos vel tres cubitos in longitudinem pateat. In pariete praeterea horizontali *CD* descripta, si filum *AB* cum glande in *AC* transtulerimus, glandemque emiserimus: primum ea arcum *CBD* describet, dum trans punctum *B* tam longe transcendit, ut fere accurate ad altitudinem lineae horizontalis descriptae se allevaverit, ergo ad *D* pervenerit. Quominus apte et accurate eo perveniat aëris et fili resistentia impedit. Hinc concludere possumus, impetum, quem in *B* glans propter casum in arcu *CB* sibi paraverit, tantum fuisse, quantus opus est, ut glans per similem arcum *BD* ad eandem altitudinem sursum pellatur.

Praeterea ad parietem in verticali *AB* alio clavo affixo, e. g. in *B*, glans e puncto *C* per arcum *CB* decidens non amplius in arcu *BD* sed in arcu *BG*, cujus centrum *E* est, vibrabit; videbimus tamen, eam de impetu in *B* sibi parato rursus reductum iri usque ad altitudinem horizontalis ad *G*, idemque fieri, si clavum etiam inferiore quodam loco, e. g. in *F* fixeris, ubi glans arcum *BI* describit ascensioni semper in linea *CD* finem imponens. Atque si clavus tanto inferiore loco affixus esset, ut glans non amplius *CD* attingere posset (id quod eveniret, si propior puncto *B* quam puncto sectionis linearum *AB* et *CD* esset), glans circum clavum vibraretur filumque circa eum volveret.

Hoc omnem fere dubitationem de veritate hujus theorematis propositi nobis eximit; quum enim arcus *CD* et *BD* aequales et homologice siti sint: momentum per casum *DB* paratum aequale est momento per casum *CD* parato; hoc vero sufficit ad mobile idem per arcum *BD* reducendum, ergo et impetus, casu per arcum *DB* acquisitus tantus est, quanto opus est, ut idem

mobile per eundem arcum rursus repellatur, omnino ergo impetus casu per aliquem arcum paratus ei semper aequalis erit, qui mobile per eundem arcum rursus repellere possit. Atqui cum momenta, quae glandem per arcus *BD*, *BG*, *BI* sursum pellunt, aequalia sint (sicuti experimento docti sumus), etiam momenta casu per hos arcus acquisita eadem sunt.

Acceleratio corporum per arcus circuli cadentium alia quidem est, quam acceleratio corporum per plana descendentium, ita ut, quamvis observatio doceat casum per arcum *CB* mobili tantum momentum adjicere, ut reduci possit per quoslibet arcus *BD*, *BG*, *BI* ad eandem altitudinem, nos simili modo concludere non possimus fore, ut idem fiat, si glandi ascendendum sit per plana, quae inclinentur ut chorda eorundem arcuum: imo vero verisimile est, dum apud punctum *B* inter plana anguli fiant, glandem, per chordam *CB* delapsam et ad plana *BD*, *BG*, *BI* offendentem impetus sui partem amissuram neque retro scansuram esse in altitudinem lineae *CD*. Quodsi vero offensio amota sit: credere possumus, eundem impetum sufficere ad mobile usque ad eandem altitudinem reducendum.

Itaque ad hujus theorematis jam approbati sententiam animus diligentius advertendus atque monstrandum erit, secundum id casum per planum inclinatum et ipsum esse motum uniformiter acceleratum. Galileum hoc nostro theoremate simul expressum voluisse, huic rei documento est sententia scholii (vid. pag. 589), ubi dicit:

„Id autem quod demonstratum est in lationibus peractis in perpendiculis, intelligatur etiam itidem contingere in planis utcunque inclinatis: in iisdem enim assumptum est, accelerationis gradus eadem ratione augeri, nempe secundum temporis incrementum.“ Hanc persuasionem cum principio modo tractato consentire jam monstrabo, antea vero hoc theorema demonstrem necesse est:

„Si super plano inclinato atque in perpendiculo, quorum eadem sit altitudo, feratur e quiete idem mobile: tempora descensuum erunt inter se ut plani ipsius et perpendiculi longitudines.“

Hoc theorema a Galileo ipso infra ostenditur; sed demonstratione ab eo allata hoc loco uti mihi non licet, quum ea jam eadem nitatur assumtione, quam adhuc demonstraturus sum.

Sit in fig. 13 planum inclinatum *AC* et perpendiculum *AB*, quorum eadem sit altitudo supra horizontem *CB*, nempe ipsamet linea *BA*: dico, tempus descensus ejusdem mobilis in plano *AC* ad tempus casus in perpendiculo *AB* eam habere rationem, quam habet longitudo plani *AC* ad ipsius perpendiculi *AB* longitudinem. Intelligantur enim quotlibet lineae *DE*, *FG*, *HI* horizonti parallelae, constat e principio ab autore jam constituto, gradus velocitatis mobilis descendentis e quiete in *A*, in punctis *D*, *E*, acquisitos esse aequales, cum accessus ad horizontem aequales sint: similiter gradus in punctis *F*, *G* iidem erunt: nec non gradus in *H*, *I*. Atqui mobile per *AC* cadens in quocunque velocitatis gradu toties diutius commoratur, quam mobile per *AB* cadens, quoties *AC* major est quam *AB*, unde concludendum est, et ipsum motuum tenorem eandem habere rationem, vel tempus per AC : tempus per $AB = AC : AB$.

Mobile autem per *AC* cadens in quocunque velocitatis gradu, e. g. in gradu in *E* acquisito, toties diutius commorari, quam mobile per *AB* cadens in gradu in *D* acquisito, secundum rationem ipsam $AC : AB$, sic demonstratur: Linea infinite parva *DK* notet spatium, per quod mobile cum velocitate in *D* acquisita moveatur, ita ut haec velocitas in *K* demum denuo augeatur: in plano inclinato mobile in eodem velocitatis gradu tamdiu commorabitur, quamdiu spatium homologicum *EL* percurrit. Qua de causa secundum theor. I dissertationis „de motu aequabili,“ tempus per *EL* est ad tempus per *DK*, ut ipsamet linea *EL* ad lineam *DK*, seu ut longitudo plani *AC* ad ipsam perpendiculi *AB* longitudinem.

Hincque colligitur, tempus per *EG* ad tempus per *DF* habere rationem $AC : AB$.

Ope hujus theorematis nunc facile ostendi potest, casum in quolibet plano *AC* (fig. 13) esse motum aequabiliter seu uniformiter acceleratum.

Ad hunc finem demonstrabo, mobile temporibus aequalibus aequalia acquirere celeritatis incrementa.

Percurrantur spatia *EL*, *GI* temporibus aequalibus (fig. 13): dico, incrementa velocitatis hoc tempore in *L* et *I* acquisita esse aequalia. Constat ex ante jam demonstratis et assumtis 1) momenta in *E*, *G*, *L*, *I* acquisita aequalia esse momentis in *D*, *K*, *F*, *H* acquisitis; itaque 2) incrementa quoque velocitatis in *L* et *I*,

tempore casus per *EL* vel *GI* acquisita, aequalia esse incrementis velocitatis in *K* et *H*, temporibus casuum *DK*,*FH* acquisitis. Atqui cum haec tempora aequalia sint, et casus verticalis sit motus uniformiter acceleratus, illa velocitatis incrementa erunt aequalia. Tempora autem casuum per *DK*,*FH* aequalia esse, e praecedente propositione deducitur. Nam quum sit

tempus per *EL* : tempus per *DK* = *AC* : *AB* et
tempus per *GI* : tempus per *FH* = *AC* : *AB*, concludimus,
tempus per *EL* : tempus per *DK* = temp. p. *GI* : tem. p. *FH*.

Sed posuimus tempus per *EL* = tempus per *GI*; ergo concluditur tempus per *DK* = tempus per *FH*. —

Demonstrata hoc modo sententia suppositionis ab autore propositae, jam tempus est theoremata eam sequentia demonstrandi, quibus Galileus qualitates motus uniformiter accelerati ex ejus definitione deducit. Primum eorum hoc est:

Theor. I. Suppositio I.

„Tempus, quo spatium quoddam a mobili conficitur motu e quiete uniformiter accelerato, est aequale tempori, quo idem spatium conficitur motu aequabili, cujus velocitatis gradus subduplus est ad summum et ultimum gradum velocitatis prioris motus uniformiter accelerati."

Repraesentetur in figura 14 *AB* tempus, quo a mobili motu uniformiter accelerato e quiete in *C* conficiatur spatium *CD*; graduum autem velocitatis maximus et ultimus significetur linea *EB*, utcunque super *AB* constituta et jungatur *AE*: omnes lineae, quae in triangulo *ABE* ejus lateri *BE* parallelae ducuntur, ut *MN*, *OP*,.... crescentes velocitatis gradus significabunt momentis temporis *M*,*O*... Nam ob similitudinem triangulorum nunc constitutorum ratio illarum linearum *MN*,*OP* est aequalis rationi temporum *AM*,*AO*, quae iterum ob allatam motus aequabiliter accelerati definitionem cum ratione velocitatum congruit. Divisa deinde *BE* bifariam in *F*, ductisque *FG*,*AG* ipsis *BA*,*BF* parallelis, parallelogrammum *AGFB* triangulo *AEB* erit aequale, dividens suo latere *GF* bifariam *AE* in *I*: quodsi parallelae trianguli *AEB* usque ad *GIF* extendantur, habebimus aggregatum parallelarum omnium in quadrilitero contentarum aequalem aggregatui comprehensarum in triangulo *AEB*; quae enim sunt in triangulo *IEF* paria sunt contentis in triangulo

GIA; eae vero, quae habentur in trapezio *AIFB*, communes sunt. Cumque singulis temporis momentis respondeant singula lineae *AB* puncta, ex quibus descriptae parallelae in triangulo *AEB* crescentes gradus velocitatis significant, parallelae vero parallelogrammi totidem gradus velocitatis motus uniformiter accelerati repraesentent: apparet, totidem velocitatis momenta absumta esse motu accelerato juxta crescentes parallelas trianguli *AEB*, ac in motu aequabili juxta parallelogrammi *GB* parallelas; quod enim momentorum deficit in prima motus accelerati medietate (deficiunt momenta per parallelas trianguli *AEB* significata), reficitur a momentis per parallelas trianguli *IEF* repraesentatis. Patet igitur, aequalia futura esse spatia tempore eodem a mobilibus peracta, quorum alterum motu e quiete uniformiter accelerato moveatur, alterum vero motu aequabili, cujus velocitas est subdupla i. e. dimidia pars velocitatis maximae motus accelerati.

Cui ab autore allato argumento hoc argumentum explicationis causa adjicio. Quodsi animo effingimus, motus hoc loco secum comparatos simul fieri, i. e. simul incipere, apparet fore, ut corpus aequabiliter motum, cum jam ex initio velocitatem $=$ *BF* habeat, alteri corpori e quiete uniformiter accelerato praecurrat, et ab eo magis magisque discedat, donec hoc velocitatem acquisiverit, quae aequalis sit velocitati motus aequabilis. Quod continget si dimidia pars temporis totius motus praeterlapsa fuerit, i. e. in figura nostra tempore *H*. Tum autem distantia horum duorum corporum ad summum pervenit gradum, alterumque corpus, cum velocitas corporis accelerati continuo augeatur, prius corpus perpetuo persequetur et magis magisque illi appropinquabit.

Modum remotionis et insequentis appropinquationis utriusque corporis sensibus hac ratione subjicere possumus, ut consideremus differentiam velocitatum absolutarum, quae corporibus quovis tempore sunt, quam in figura lineis triangulorum *AFI* et *EFI* lineae *BE* parallelis notare possumus. Prioris trianguli lineae significabunt velocitates, quibus prius corpus ab altero discedit, alterius trianguli lineae significabunt velocitates, quibus alterum persequitur prius. Postremum e congruentia triangulorum *AGI* et *EIF* concludimus fore, ut tempore *AB* praeterlapso corpus uniformiter acceleratum prius corpus jam assecutum

sit, unde sequitur, ut ab iis hoc tempore idem spatium confectum sit, nempe CD.

Theor. II. Propos. II.

„Si quid mobile motu uniformiter accelerato descendat ex quiete, spatia quibuscunque temporibus ab ipso peracta sunt inter se in duplicata ratione eorundem temporum, nempe ut eorundem temporum quadrata.“ (vid. fig. 15). Intelligatur fluxus temporis ex aliquo primo instanti A repraesentari per extensionem AB, in qua sumantur duo quaelibet tempora AD, AE, sitque HI linea, in qua mobile ex quiete in H descendat uniformiter acceleratum; sit spatium HL peractum primo tempore AD, HM vero spatium, per quod mobile tempore AE descendit. Dico spatium MH ad spatium HL eandem habere rationem, quam habeant quadrata temporum i. e. quam habeat AE^2 ad AD^2. Spatium HL, quod tempore AD motu uniformiter accelerato conficitur, eodem quoque tempore (ut ex antecedente theoremate intelligitur) a motu aequabili absolvetur, cujus velocitas aequalis est dimidiae parti velocitatis, a priori motu postremum i. e. in puncto L acquisitae. Eadem de causa et spatium HM tempore AE uniformiter percurretur cum velocitate aequali dimidiae parti momenti ab accelerato motu in M parati. Cum igitur velocitates motus uniformiter accelerati in L et M acquisitae (ob ejus definitionem) eandem habeant rationem, quam tempora, quibus sint acquisitae, vel quam AD ad AE: velocitates illorum duorum motuum aequabilium eandem quam tempora habebunt rationem. In quarta vero propositione tractatus „de motu aequabili“ jam demonstratum est, mobilium aequabili motu latorum spatia peracta habere inter se rationem compositam e ratione velocitatum et e ratione temporum: hic autem ratio velocitatum aequalis est rationi temporum; ergo ratio spatiorum, $HL:HM$, dupla est rationis temporum, sive

$$HL : HM = AD^2 : AE^2.$$

Patet quoque, eandem spatiorum rationem esse duplam rationis maximorum sive ultimorum graduum velocitatis.

Corollarium I. (vid. pag. 586).

„Hinc manifestum est, quod si fuerint quotcunque tempora aequalia consequenter sumta a primo instanti seu principio motus,

AD, DE, EF, FG (fig. 15), quibus conficiantur spatia HL, LM, MN, NI, ipsa spatia erunt inter se, ut numeri impares ab unitate, scilicet ut 1, 3, 5, 7."

E praecedente propositione deducitur, tota spatia HL, HM, HN, HI eandem rationem habere, quam quadrata temporum, quibus percurrantur, AD^2, AE^2, AF^2, AG^2. Supposuimus vero $AE = 2\,AD$, $AF = 3\,AD$, $AG = 4\,AD$; ergo habent spatia illa rationem numerorum 1, 4, 9, 16, qui sunt quadrata numerorum integrorum ab unitate consequenter sumtorum. Quum vero spatia HL, LM, MN, NI pro differentiis integrorum spatiorum HL, HM, HN, HI sint habenda, necesse est ea habeant rationem differentiarum quadratorum ab unitate consequentium. Quas differentias aequales esse numeris imparibus, sic domonstrari potest.

Quadratum numeri integri n est n^2, sicut quadratum numeri $(n+1)$ est $(n+1)^2$, quorum differentia $= (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$. Sed haec quantitas $(2n+1)$ nihil est nisi numerus impar ordinis $(n+1)$.

Corollarium II. (pag. 589.)

„Colligitur secundo, quod si a principio motus sumantur duo spatia quaelibet, quibuslibet temporibus peracta, tempora ipsorum erunt inter se, ut alterum eorum ad spatium medium proportionale inter ipsa."

Sumtis enim a principio motus duobus spatiis ST, SV (Fig. 16), quorum medium sit SX, tempus casus per ST ad tempus casus per SV rationem habebit $= ST : SX = SX : SV$. Cum enim demonstratum sit, spatia peracta esse in duplicata ratione temporum, ratio autem spatii ST ad SV sit dupla rationis $SX : SV$, seu sit eadem quam habeant quadrata SX^2, SV^2: patet, rationem temporum per SV, ST esse eandem quam habeant lineae SV, SX.

Scholium.

„Id autem, quod demonstratum est in lationibus peractis in perpendiculis, intelligatur etiam contingere in planis utcunque inclinatis: in iisdem enim assumtum est, accelerationis gradus eadem ratione augeri, nempe secundum temporis incrementum, seu dicas secundum simplicem ac primam numerorum seriem."

Postquam e definitione motus uniformiter accelerati qualitates ejus demonstrationibus geometricis deductae sunt, doceri potest, corporum casum revera esse talem motum, dum experimentis explicatur, qua ratione modoque qualitates vel potius dicam proprietates motus illius observentur in casu corporum. Ejusmodi experimentum autor hic affert, quod jam exponam.

In assere ligneo, qui duodecim fere cubitos in longitudinem, dimidium cubitum in latitudinem, tresque digitos transversos in crassitudinem pateat) parvus excavetur canalis (paullulo crassior quam tres digitos). Oportet eum esse plane et aeque ductum, utque laevissimus fiat, membrana glutine inseratur. Uno alterove asseris extremo fine ut libuerit uno vel duobus cubitis super planum horizontale elevato, glans perdura, bene rotundata atque polita per laevem illum canalem demittatur, dum observetur tempus, quod praeterlabatur usque quoad omnino percursus sit canalis. Quod experimentum si ante rem ipsam saepius repetiveris, omnino nunquam differentiam videbis, modo observes ea qua par est calliditate.

Quibus peractis eandem glandem per quartam canalis partem demittas, cujus casus si tempus mensus fueris, invenies, hoc tempus semper dimidiam esse prioris temporis partem. Si hoc experimentum reliquis quoque partibus canalis adhibueris, dum glans e. g. per bessem vel dodrantem et quae sunt reliqua hujusmodi, longitudinis ejus demittatur, semper videbis, spatia eandem rationem habere, quam temporum quadrata, quibus confecta sint. Idque continget, utcunque canalis planum inclinaveris.

Quodsi simul et inclinationem planorum metiris, intelliges tempora casus per plana diverse inclinata omnino eandem habere rationem, quam in suppositione supra allata significatam deprehenderamus. Manifestum est in perficiendo hoc experimento accuratissimo opus esse chronometro, quo in eligendo Galileus, qui operationes modo dictas, multis discipulis coram versantibus, fortasse centies perfecit, acumen maxima admiratione dignum praestitit. Ipse constructionem ejus his verbis describit.

Amphora magna aquae plena suspenditur, quae per canalem minimum subtilemque e fundo tenue aquae filum effundit, quamdiu glans asserem ejusque partes percurrit. Particulae aquae congestae deinde summa cum subtilitate librantur, qua re peracta

differentia et ratio earum ponderis indicat differentiam et rationem temporum, quibus acquisitae sunt.

Ex hujus experimenti indole potest intelligi, casui ipsi corporum verticali id non posse adhiberi, quia hac conditione acceleratio magis in se ipsam intendit, id quod observationi nocet. Atwood demum ejusmodi experimentum adjuvante machina illa, ab ipso inventa, quae nomen ab eo traxit, i. e. machina cadendi Atwoodiana corporibus adhibuit, quae verticaliter, sed non omnino libere descendunt.

Sicuti suppositionis jam saepius laudatae auxilio docebatur, casum in plano inclinato esse motum uniformiter acceleratum, siquidem ejus definitio in verticalem casum quadret; ita demonstrari potest fore, ut, siquidem motus corporum per quodlibet planum inclinatum delabentium sit uniformiter acceleratus, omnino omnia rectis lineis cadentia corpora, ideoque corpora verticaliter decidentia ita moveantur, ut spatia confecta eandem rationem habeant, quam temporum quadrata. Corporum autem accelerationem per plana diverse inclinata decidentium, re vera eandem habere rationem, quam jam supra indicatam atque illustratam vidimus, — nempe ut „gradus velocitatis ejusdem mobilis super diversas planorum inclinationes acquisiti aequales sint, si plana aequalem habeant elevationem" — credi quidem perfacile potest, sed id ipsum omnino parum canfirmatum habemus. Praeterea quum suppositio illa sit fundamentum, in quo omnia fere reliqua dissertationis Galileicae theoremata posita sint, non est quod miremur, quod autor hac de causa praesertim a Cartesio sit reprehensus, qui ei opprobravit sine fundamento aedificasse. Qua de causa Galileus (cf. „lettera di G. G. vol. II pag. 454) anno MDCXXXIX exeunte in recentiorem editionem operum suorum illo tempore vulgari coeptam argumentum severum atque systemati suo conveniens illius theorematis sub specie dialogi academicorum inserendum curavit. Hoc argumentum editio, quae mihi in promptu est, continet inde a pag. 589 usque ad pag. 592 itaque eodem loco, quem jam explicatione mea attigi.

Suppositio illa supra jam constituta, quam hic theorematis nomine appellare velim, haec est:

„Gradus velocitatis ejusdem mobilis super diversas planorum inclinationes acquisiti sunt aequales, si plana aequalem elevationem habent."

Demonstratio.

Haec demonstraturo mihi illa praesertim utilitati erunt, quae jam in introductione de momentis diversis allata sunt, quae idem mobile habet, descendendi, prout in diversas inclinationes ad horizontem versus transponatur. Demonstratio enim haec theoremate in illo loco explicato praecipue nititur: „momentum sive impetus mobilis cujusdam in plano quodam inclinato descendendi ad momentum totale, quod ei est in linea verticali, eandem rationem habet, quam alitudo seu elevatio plani inclinati ad longitudinem ejusdem.“ Deinde etiam, secundum hucusque explicata ad theorema jam confirmatum et approbatum provocare possum „mobile quoddam in plano utcunque inclinato, sicut in linea perpendiculari, e quiete decidens, velocitatis gradus acquirit, qui proportionales sunt tempori, quam ob rem, ut e secunda propositione apparet, spatia confecta eandem rationem habent, quam temporum seu velocitatum quadrata.

Sint in figura 17. AB, AE duo plana utcunque inclinata, quibus eadem sit altitudo AC, lineaque BC putetur esse horizon; deinde ex AB ita deseces partem AD, ut sit $AB : AC = AC : AD$: secundum theorema jam dictum atque e libello „scienza meccanica“ haustum, impetus mobilis per verticalem AC ad impetum ejusdem in plano AB vel AD, eandem rationem habet, quam $AB : AC = AC : AD$, unde conjici potest, a mobili partem AD plani inclinati AB eodem tempore confici, quo spatium perpendiculare AC, ex sententia principii: „momenta eandem habent rationem, quam velocitates vel spatia, quae eodem tempore conficiuntur.“ Nec non velocitatis gradus in C ad velocitatem in D eandem habebit rationem, quam AC ad AD, quia hinc et AC et AB motu uniformiter accelerato, illinc eodem tempore percurruntur. Velocitas denique in B ad velocitatem in D eandem rationem habet, quam tempus per AB ad tempus per AD, secundum definitionem motus uniformiter accelerati, tempusque per AB ad tempus per AD eandem rationem habet, quam AC, quae est proportionalis media inter AB et AD, ad AD ex sententia corollarii posterioris. Ergo velocitates in B et C ad velocitatem in D eandem habent rationem, nempe $AC : AD$; quamobrem aequales eas esse oportet.

Eadem ratione intelligitur fore, ut impetus casu per planum inclinatum AE in E acquisitus aequalis sit impetui in C acqui-

sito; qua de causa impetus quoque in *B* aequalis est impetui in *E*, ergo in universum: „Gradus velocitatis ejusdem mobilis super diversas planorum inclinationes acquisiti aequales sunt, si plana aequalem elevationem habent." —

Clare jam et accurate cognitum habemus, quomodo idem mobile, prout per plana diverse inclinata descendat, in diversos quidem motus, semper vero uniformiter acceleratos se conferat. Quam autem motus corporum duorum diversorum inter ipsos habeant rationem, hac de re nihil dum allatum est; qua re mox dijudicata, hoc efficietur: „ut omnia corpora, utcunque sint diversa eorum pondera materiaeque, in spatio vacuo, ceterum rationibus paribus, in eosdem se conferant motus." Mobile igitur certum in casu libero perpendiculari tempore constituto non solum per spatium constitutum cadet, sed omnino omnia corpora in spatio vacuo eodem modo verticaliter descendent, ergo idem spatium eodem tempore percurrent. Hanc veritatem gravissimam a Galileo jam in primo dialogo operis sui „discorsi e dimostrazioni mattematiche" a pag. 518 usque ad pag. 533 tractatam videmus, ubi omni dicendi facultate contendit, ut conjecturas a natura abhorrentes, ab Aristotele de hac re propositas, refellat, suorumque ipsius dogmatum veritatem luce clarius demonstret. Communicabo igitur sententiam ejus demonstrationis. Initio Galileus utramque Aristotelis conjecturam refutat, e qua hic concluserat, in spatio vacuo motum seu casum esse non posse, non magis, quam motus momentaneus esse possit. Conjecturae autem hae sunt:

I. „Corpora gravia diversa in eodem medio moventur cum velocitatibus, quibus eadem, quae ponderibus earum, ratio est."

II. „Idem mobile diversis mediis velocitatibus movetur, quae in ratione inversa secum versantur, quam in qua densitates mediorum."

Sequitur refutatio prioris conjecturae.

(Cf. pag. 518—520.)

Dubitari nequaquam potest, quin quodvis corpus grave velocitatem habeat naturae ipsius convenientem constitutamque, quae neque augeri neque imminui possit, modo ne impedimenta obstent. Conjunctis igitur duobus mobilibus, diversam velocitatem

habentibus: manifestum erit fore, ut non solum velocius mobile a tardiori retineatur, sed etiam tardioris motus velociori acceleretur. Quodsi igitur gravius corpus cum leviori conjungamus, summa harum materiarum, licet majori corpore solo sit gravior, tamen tardius movebitur, quam majus corpus, quod Aristoteles contendit velocius cadere minori levique.

Unde intelligimus, ex opinione asseverante „globum graviorem velociori deferri casu quam leviorem" hanc conclusionem omnino repugnantem posse deduci „ut quo gravius sit corpus, eo cadat tardius."

Qua de causa illa persuasio vera esse nequit; ista quoque conclusio ex ea deducta eique repugnans nempe, quod corpus grave tardius delabatur quam levius corpus, irrita est. Attamen cave ne statim concludas corpus grave, quia nec velociori nec tardiori deferatur casu, quam levius, eadem velocitate moveri oportere. Haec enim esset argumentatio fallax, quae vero ea conditione probatur, si duo mobilia illa aequalem habeant gravitatem specificam, ubi autem illa conclusio secundum logices leges juste deduci potest. Concedendum enim est, corpora aeque gravia atque ex eadem materia composita, aeque velociter deferri oportere, quum necquidquam diversi offerant, nisi formam eorum respiciamus. Praeterea, si plura aeque velociter se moventia corpora conjungantur, neutrum eorum alterum neque impediet neque accelerabit, ergo composita eandem velocitatem retinebunt. Si igitur plura corpora aeque gravia et aequum habentia pondus specificum inter ipsa conjungimus: ea se ipsa non impedient, quominus suam quodque velocitatem retineat, itaque massa composita magna eadem cum velocitate movebitur, quacum singulae ejus partes. Unde conjicere nobis licet, corpora omnia idem pondus specificum habentia, quantumcunque differat pondus eorum absolutum, aeque velociter deferri. Anno MDLXXXIX, quo Galileus professor ad universitatem Pisananam vocatus erat, veritatem hujus theorematis experimento publice docuit, e turri demittens globos diversi gravitatis, qui eodem tempore terram attigerunt. Cui experimento permulti ejus collegae discipulique interfuerunt.

Refutatur altera conjectura.

Altera Aristotelis opinio haud minus irrita est, qua ductus contendebat idem corpus e. g. in aëre toties velocius quam in

aqua moveri oportere, quoties aquae densitas densitatem aëris vincat. Quodsi igitur ponimus rationem densitatum horum mediorum esse eandem quam habeat 1 : 10, necesse esset quodvis corpus in aëre decies velocius deferatur quam in aqua. Jam videmus hoc in universum certe verum esse non posse, siquidem intelligamus corpora, quae in aëre magna adhuc velocitate deferantur, in aqua nec decies tardius, et omnino non cadere, quia emergant et natent. Sumamus globum ligneum et significemus ejus velocitatem in aëre numero vicesimo: necesse esset cum ex Aristotelis sententia in aqua velocitate numeri secundi delabi, id quod non contingit, quia in sublime fertur. Manifeste autem corpora erunt, quae in aqua duobus velocitatis gradibus deferantur; haec vero sine dubio graviora ligno esse oportebit. Aristotele judicante eadem in aëre cum 20 gradibus velocitatis moverentur. Ergo corpora invenissemus diverse quidem gravia sed in eodem medio aeque velociter se moventia. Itaque haec Aristotelis altera conjectura priori illi repugnat. Sed, omissis ejusmodi observationibus abstractis, experimentis docemur, quamvis ovum marmoreum in aqua fortasse centies velocius deferatur quam ovum gallinaceum, idem non amplius contingere, si per aërem delabantur, ubi in viginti cubitorum casu ne quatuor quidem digitos transversos inter se discedant. Omnino autem corpus certum in aqua vicies fortasse tardius delabetur quam in aëre, alio quodam, e. g. globulo plumbeo vix duplo tardius cadente. Galileus, conjecturis Aristotelicis hac ratione refutatis, pergit ad monstrandas rationes veras, quae in corporibus diverse gravibus, dum moventur in diversis mediis, observari solent. De quibus id tantum mihi afferendum est, quod de corporibus per spatium vacuum cadentibus contendit atque demonstrat, nempe hoc „quod omnia corpora in spatio vacuo aequali velocitate deferantur.“

Demonstratio.

Jam supra memoravimus, differentiam velocitatum mobilium diverse gravium eo majorem esse, quo densiora sint media, ita tamen ut e. g. in argento vivo aurum non solum velocius deferatur, quam plumbum, sed etiam omnino solum cadat, dum alia metalla et lapides cuncti in sublime ferantur et natent, quamvis differentia horum per aërem motuum minima sit, quia globulus aureus, centum cubitos delapsus, globulum cupreum profecto ne

quatuor quidem transversorum digitorum latitudine praecurret. Quod si intelligimus, animo fingere possumus, omni resistentia medii amota, materias omnes aequali velocitate deferri. Namque observamus in mediis tenuissimis differentiam velocitatum sentiri non posse, licet pondus mobilis maxime differat, concludere possumus in spatio vacuo velocitates omnino aequales futuras esse.

Hoc consilio considerantes, quid in aëre contingat, sumamus vesicam aëre impletam, cui in aëre leve tantum pondus erit, magnumque globum plumbeum, millies ut libuerit graviorem hac vesica. Quo facto haec duo mobilia ex altitudine quatuor vel sex cubitorum demittamus: globus plumbeus ne duplo quidem velocius delabetur (quamvis Aristoteles eum centies velociorem reddat) quam vesica. Quo major autem altitudo erit, de qua eum demiserimus, eo major etiam differentia velocitatum fiet. Itaque si ponderum differentia causa esset differentiae velocitatum: haec tamen eadem manere necesse esset, ideoque spatia confecta eandem semper rationem habere oporteret, quatenus pondera non mutarentur. Causa illa igitur repetenda est a resistentia, quam medium exercet, atque concludere possumus, hoc medio amoto, velocitates mobilium aequales futuras esse. Contra quae hoc quidem contradici potest: quodsi differentia ponderum non possit efficere variationem rationis velocitatum, quia pondera non mutentur: non magis medium hoc efficere potest, quod idem mansurum continuo putemus.

Ad quae hoc respondendum est:

Quodvis grave propensionem habet se ad centrum terrae movendi (cf. pag. 7) semper uniformiter acceleratum (cf. pag. 24) ita, ut aequalibus temporibus aequalia semper incrementa velocitatis gignantur. Hoc semper continget, dum omnia impedimenta fortuita sint amota; quorum autem unum amoveri non potest nempe impedimentum medii, per quod corpus transire, quodque dissolvere debet. Resistentia, quae ei hoc in opere occurrit, eo major erit, quo velocius illa dissipatio perficitur, i. e. quo major mobils est velocitas. Quatenus igitur mobile semper velocius velociusque cadit: illa resistentia continuo augetur, atque postremo tam magna fit, ut corpus impediat, quominus etiam velocius cadat, ita ut motus ejus fiat uniformis. Medii igitur resistentia non augetur, quia hoc ipsum immutatur, sed quia mobilis velocitas continuo adaugescit. Si perpendimus resistentiam aëris esse

permagnam, siquidem eam contendamus cum parvo vesicae momento, levem autem apud globum plumbeum; constat, hac resistentia in magnum vesicae commodum amota, velocitates quoque aequales futuras esse.

Experimentum.

Nobis observaturis, num velocitates corporum diversorum aequales sint, nonnullae difficultates occurrunt. Quodsi enim mobilia de loco valde edito demiserimus, resistentia aëris ad levius corpus jam nimis valebit, si vero hic locus non satis editus fuerit, differentiam, quae fortasse revera adest, sentire non poterimus. Quomodo Galileus hanc difficultatem evitat? Duplici ratione eam vincit. Namque, inquit, aut corpora non verticaliter, sed per plana magnopere declinata demitto, aut facio ut casum per parvas altitudines continuo repetant, ita ut hac ratione parvae temporis differentiae, ut ita dicam, cumulentur et multiplicentur. Quod ut assequar in duobus filis aeque longis globum plumbeum et globum suberinum suspendo, illum fortasse centies graviorem quam hunc; deinde utroque aeque longe a verticali amoto atque una emisso, vibrationes eodem semper tempore repetent. His adhuc adjicio, ut antlia pneumatica facultatem nobis obtulerit, etiam simplicioribus et ad persuadendum accommodatioribus experimentis utendi, quia ea adjuvante medium repugnans, i. e. aërem, omnino amovere possumus.

Naturam casus corporum rectilinei atque liberi, i. e. resistentia medii non immutati jam satis determinatam videmus, facultas igitur nobis data est rationum atque relationum explicandarum, quae inter diversos motus rectilineos exstent. Itaque ad dissertationem Galileicam redeo, in cujus pagina 592 nunc versamur.

Ad hanc rem sufficit, motus duorum corporum in planis diverse inclinatis descendentium comparari, quia universa accelerationis indoles inclinatione lineae vel plani inclinati constituitur, in quo mobile descendit. Hoc consilio cognoscemus, quas notas motus super plana inclinata atque haec ipsa prae se ferant.

Quod ad motus attinet notandus est

1) tenor eorum vel tempus t, quo conficiuntur,

2) spatium hoc tempore percursum, quod congruit cum longitudine l plani inclinati; hoc autem planum tum demum

erit plane constitutum, si praeterea vel ejus altitudo seu elevatio e, vel inclinatio i ejus horizontem versus determinata est. Quibus quantitatibus pro alio motu per literas T, L, E, I notatis, relationes nobis sunt determinandae, quae exstent inter quantitates t, l, e, i, T, L, E, I, earumque formae, quas sub conditionibus singularibus imbuant, considerandae. Cujusmodi conditiones eveniunt, si motuum notae quaedam sunt aequales, v. g. si 1) $i = I$ 2) $e = E$, 3) $l = L$, 4) $t = T$. Plures species esse non possunt, quia, si duae notae aequales esse putarentur, inter motus non posset amplius dignosci. Quatuor illas formas diligentius considerabo.

I.

Si $i = I$, i. e. si plana eandem habent inclinationem ad horizontem, spatia confecta eandem habebunt rationem, quam habent quadrata temporum, ut supra jam demonstratum est, ideoque erit $L : l = T^2 : t^2$. Praeterea habebimus $L : l = E : e$. Reliquae vero species nondum tractatae sunt, de quibus nunc agetur.

II.

Quam rationem habeant quantitates l, t, L, T, si ponamus $E = e$, subsequente theoremate III ejusque Corollario explicabitur.

III.

De specie $l = L$ theorema IV agit.

IV.

Species autem $t = T$ duplici ratione dijudicari potest, nam quum quantitates L, E, I, l, e, i sint quantitates geometricae, tum in earum relationes mere geometricas, quum in earum relationes algebraicas inquiri potest. Quare illa species duobus theorematis tractatur, nempe theor. VI, quod illarum quantitatum rationes geometricas et theor. VII, quod algebraicas exponit.

Relationes denique generales, quae quantitatibus t, l, i, e, T, L, I, E sunt, theorema V ostendit. Jam accingar his propositionibus explicandis.

Theorema III. Propositio III.

„Si super plano inclinato atque in perpendiculo, quorum eadem sit altitudo, feratur e quiete idem mobile: tempora lationum erunt inter se ut plani ipsius et perpendiculi longitudines.“

Sit in fig. 17 planum inclinatum *AB* et perpendiculum *AC*, quorum eadem sit altitudo *AC* supra horizontem *CB;* dico, tempus descensus super plano *AB* ad tempus casus in perpendiculo eam habere rationem, quam habeat longitudo plani *AB* ad ipsius perpendiculi *AC* longitudinem.

Supra jam demonstravimus gradus velocitatis in punctis *B* et *C* acquisitos aequales esse; quem gradum hic litera v significare velim. Constat autem e prima propositione hujus capitis, tempus casus per perpendiculum *AC* aequale esse ei, quo mobile aequabiliter latum idem spatium percurrat, quum ejus velocitas sit $= \frac{1}{2} v$; atque similiter intelligimus tempus casus per planum *AB* congruere tempori, quo idem spatium a velocitate $\frac{1}{2} v$ aequabiliter peragatur. Concludimus ergo tempora descensuum per lineas *AC*, *AB* habere rationem eorum temporum, quibus, aequalibus velocitatibus, eadem spatia motu aequabili percurrantur. Quae ratio secundum propositionem I capitis „de motu aequabili" rationi spatiorum *AC*, *AB* aequalis est.

Corollarium.

„Hinc colligitur tempora descensuum super planis diversimode inclinatis, dum tamen eorum eadem sit elevatio, esse inter se, ut eorum longitudines." Si enim intelligatur aliud planum *AE* fig. 17, ex *A* ad eundem horizontem terminatum, pariter demonstrabitur, tempus descensus per *AE* ad tempus per *AC* esse, ut linea *AE* ad *AC;* ut autem tempus per *AC* ad tempus per *AB* ita linea *AC* ad *AB:* ergo ex aequali:

$$AE : AB = \text{tempus per } AE : \text{tempus per } AB.$$

Theor. IV. Propos. IV.

„Tempora lationum super planis aequalibus sed inaequaliter inclinatis sunt inter se in subdupla ratione elevationum eorundem planorum permutatim accepta."

Sint in fig. 18 ex eodem termino *B* plana aequalia *BA*, *BC* inaequaliter inclinata, et ductis *AE*, *CD* lineis horizontalibus ad perpendiculum usque *BD*, sit plani *AB* elevatio *BE*, plani *BC* vero *BD* et ipsarum elevationum *BD*, *BE* media proportionalis sit *BI:* constat rationem $DB : BI$ esse subduplam rationis $DB : BE$. Dico rationem temporum lationum per *BA*, *BC* aequalem esse rationi $BD : BI$.

Ducatur IS ipsi DC aequidistans. Et quia jam demonstratum est, tempus descensus per BA ad tempus casus per perpendiculum BE esse ut ipsa BA ad BE : tempus autem per BE ad tempus per BD ut BE ad BI (vid. Coroll. II), et tempus per BD ad tempus per BC ut $BD:BC$ seu ut $BI:BS$: ex aequali erit tempus per BA ad tempus per BC ut BA ad BS sive ut BC ad $BS = BD:BI$.

Theor. V. Propos. V.

„Ratio temporum descensuum super planis, quorum diversae sint inclinationes et longitudines, nec non elevationes inaequales, componitur e ratione longitudinum ipsorum planorum et e ratione subdupla elevationum eorundem permutatim accepta.“

Sint in fig. 19 illa plana AC, AB, dico, rationem temporis descensus per AC ad tempus per AB compositam esse e ratione ipsius $AC:AB$ et e subdupla elevationum ratione permutatim accepta. Ducatur enim perpendiculum AD, cui occurrant horizontales BG, CD, et inter elevationes DA, AG media sit AL; e puncto vero L ducta parallela horizonti occurrat plano AC in F, erit quoque AF media inter CA, AE. Et quia tempus per AC ad tempus per AE est ut linea FA ad AE, tempus autem per AE ad tempus per AB, ut eadem AE ad AB : patet, tempus per AC ad tempus per AB esse ut AF ad AB. Demonstrandum itaque restat, rationem $AF:AB$ componi e ratione $CA:AB$ et e ratione $GA:AL$, quae est ratio subdupla elevationum DA, AG permutatim accepta. Quod sic explicari potest:

$$1)\quad \begin{array}{l} AF:AC = AL:AD \\ AL:AD = AG:AL \\ \hline AF:AC = AG:AL; \end{array} \qquad 2)\quad \begin{array}{l} AF:AC = AG:AL \\ AC:AB = AC:AB \\ \hline AF:AB = AC.AG:AB.AL. \end{array}$$

Theor. VI. Propos. VI.

„Si a puncto sublimi vel imo circuli ad horizontem erecti ducantur quaelibet plana usque ad circumferentiam inclinata, tempora descensuum per ipsa erunt aequalia.“

Tres exstant demonstrationes hujus theorematis a Galileo conscriptae. Prima deducitur e praecedente propositione, hanc ob rem illum superiorem locum obtinente. Secunda fundata est principiis, quae Galileus vocat mechanica, in introductione traditis. Tertia id sibi vult, ut, neglecta illa praecedente proposi-

tione, ostendatur, quamlibet circuli chordam eodem tempore percurri, quo linea verticalis diametra percurratur, si chorda illa vel sublimi vel imo circuli puncto finiatur. Haec est demonstratio, quam tradere velim, sed ad usum subsequentis corollarii III secunda demonstratio mihi esse videtur accommodatior; quam nunc referam.

Thesis. Mobile temporibus aequalibus chordas CA, DA percurrit. (vid. fig. 20.)

Sit enim $BA = DA$ et ducantur perpendiculares BE, DF, constat, momentum ponderis super plano CBA ad momentum suum totale esse ut BE ad BA, atque ejusdem ponderis momentum super DA ad momentum integrum esse ut DF ad DA vel BA: ergo ejusdem ponderis momentum super plano CBA ad momentum super DA est ut linea DF ad lineam BE. Quare spatia quae percurret idem mobile temporibus aequalibus super inclinationibus CA, DA: erunt inter se ut lineae BE, DF, e propositione II operis „de motu aequabili.“ Ratio autem $BE:DF$ congruit cum ratione $AC:DA$; ergo idem mobile temporibus aequalibus per chordas CA, DA descendet.

Esse autem $BE:DF = AC:AD$ sic demonstratur. Ducatur CD et per D et B ipsi AF parallelae describantur $DIGL$ et BH: inveniuntur duo triangula aequiangula CAD, DAI, quare intelligimus esse

$$CA:AD = AD:AI = BA:AI = HA:AG = BE:DF.$$

Corollarium I.

„Hinc colligitur tempora descensuum per chordas omnes esse inter se aequalia, si chordae vel sublimi vel imo circuli puncto finiantur.“

Corollarium II.

„Colligitur etiam, quod si ab eodem puncto descendant planum inclinatum et perpendiculum, super quae descensus fiant temporibus aequalibus, eadem esse in semicirculo, cujus diameter est perpendiculum ipsum.“

Corollarium III.

„Hinc colligitur lationum tempora super planis inclinatis tunc esse aequalia, quando elevationes partium aequalium eorundem planorum fuerint inter se ut eorundem planorum longitudines.“

Ostensum enim est, tempora per *CA, DA* fig. 20 esse aequalia, dum fuerit $BE:DF = CA:DA$.

Theor. VII. Propos. VII.

„Si elevationes duorum planorum duplam habeant rationem ejus, quam eorundem planorum longitudines, lationes ex quiete in ipsis temporibus aequalibus absolventur."

Sint in fig. 21 plana inaequalia et inaequaliter inclinata *AE, AB*, quorum elevationes sint *FA, DA*, et quam rationem habet *AE* ad *AB* eandem duplicatam habeat *FA* ad *DA*. Dico tempora lationum super planis *AE, AB* ex quiete in *A* esse aequalia. Ductae sint parallelae horizontales ad lineam elevationum *EF* et *BD*, quae secet *AE* in *G*, ratio $FA:AD$ dupla est rationis $EA:AB$ et ratio $FA:AD$ aequalis est rationi $EA:AG$; ergo ratio $EA:AG$ dupla est rationis $EA:AB$, ergo *AB* media est inter *EA, AG*. Et quia tempus descensus per *AB* ad tempus per *AG* est ut *AB* ad *AG*, tempus autem descensus per *AG* ad tempus per *AE* est ut *AG* ad mediam inter *AG, AE*, quae est *AB*: ergo ex aequali tempus per *AB* ad tempus per *AE* est ut *AB* ad se ipsam: sunt igitur tempora aequalia.

Theor. VIII. Propos. VIII.

„In planis ab eodem sectis circulo ad horizontem erecto, in iis, quae cum termino diametri erecti conveniunt, sive imo sive sublimi, lationum tempora sunt aequalia tempori casus in diametro: in iis vero, quae ad diametrum non pertingunt, tempora sunt breviora: in iis tandem, quae diametrum secant, sunt longiora."

Circuli ad horizontem erecti esto diameter verticalis *AB* fig. 22. Super planis, e terminis *A, B* ad circumferentiam usque productis, tempora lationum esse aequalia jam demonstratum est. Tempus vero lationis per planum *DF* brevius esse, demonstratur, ducto plano *DB*, quod et longius erit et minus declive quam *DF*: ergo tempus per *DF* brevius quam per *DB* vel per *AB*. Quum denique planum *CO* et longius et minus declive sit plano *CB*, constat tempus descensus in eo longius esse quam per *CB* vel *AB*.

Theor. IX. Propos. IX.

„Si a puncto in linea horizonti parallela duo plana utcunque inclinentur et a linea secentur, quae cum ipsis angulos faciat

permutatim aequales angulis, ab iisdem planis et horizontali contentis, lationes in partibus, a dicta linea sectis, temporibus aequalibus absolventur."

E puncto *C* lineae horizontalis *AB* fig. 23 duo plana *CD*, *CF* utcunque inflectantur et in quolibet puncto lineae *CD* constituatur angulus *CDF* angulo *BCF* aequalis: adeo ut anguli *CDF*, *CFD* angulis *BCF*, *ACD* aequales sint. Dico tempora descensuum per *CD*, *CF* esse aequalia.

Describatur circulus, in cujus circumferentia sita sint puncta *C*, *D*, *F*: quum angulus *ACD* aequalis sit angulo *CFD*, constat e geometriae elementis, lineam *AB* circulum illum in puncto *C* tangere. Quare intelligimus *C* esse punctum sublime circuli, quum linea tangens *AB* sit linea horizontis. Ergo e propositione VI deducitur tempora lationum per lineas *CD*, *CF* aequalia esse. —

Jam initio hujus capitis annotatum est, legem accelerationis, qua omnes motus nitantur, accuratissime cognosci posse in motibus rectilineis. Quum igitur acceleratio horum motuum monstrata sit, jam non difficile erit illam legem ad omnes motus valentem proposit. Nam cum compertum habeamus casum rectilineum esse motum aequabiliter acceleratum, manifestum est, constanti ad horizontem inclinationi accelerationem ipsam esse constantem. Sed etiam quantitatem hujus accelerationis, i. e. rationem quam habeat ad accelerationem in planis aliter inclinatis vel in linea verticali, determinavimus et exposuimus.

Itaque acceleratio in quolibet plano inclinato (i. e. ad certam directionem agens) non solum sibi ipsi constat, sed etiam cognita est: praeterea quatenus quivis motus, licet sit curvilineus, etiamsi directionem suam mutat, tamen quovis temporis momento certam directionem habet: motuum quoque curvilineorum accelerationis indolem perspicimus. Quamvis enim hac conditione acceleratio non amplius sit uniformis, tamen lex, secundum quam acceleratio mutatur, patescit, quia acceleratio in quovis puncto talis esse debet, qualis convenit directioni motus.

Sed quum non tantum accelerationem motuum localium, sed totam eorum naturam cognoscere velimus: relinquitur adhuc haec postulatio gravissima, ut ex accelerationis natura ipsius motus natura deducatur. Hanc quaestionem mathesis expediat; immo

etiam adjuvante analysi infinitorum nostra aetate in universum soluta est.

Pleraque theoremata et problemata nunc sequentia continent ea, quae Galileus in expedienda hac quaestione indagavit.

Quamquam propositiones quaedam aliis considerandi modis fundatae sunt, quos et ipsos delineabo, tamen ne ordinem propositionum immutem, eas in insequenti capite cunctas composui, quod, quamvis haec significatio non omnino idonea sit, inscripsi:

CAPUT. II.
De variatione accelerationis.

Hoc caput pro diversitate materiae tractandae in tres partes dividi potest: sed earum in dissertatione Galileica praecipua ratio non habetur. Quum autem hoc caput in conspectu positurus sim, hae partes diligentius mihi dignoscendae sunt.

I.

Primo enim in hoc capite theoremata quaedam deprehendentur atque problemata, quae tantum ad motum aequabiliter acceleratum purum spectant. Ejusmodi sunt: Probl. III, Theor. XIII, Probl. V, VI, VII, XII, XV.

1) Quaeritur, quam rationem inter se habeant spatia temporibus aequalibus peracta a mobilibus in planis diverse inclinatis descendentibus, quum mobilia jam celeritate praedita fuerint initiali qualibet sed eadem. Haec quaestio solvitur in problemate III et theoremate XIII.

2) Quum motu uniformiter accelerato tempore eodem spatium percurratur eo majus, quo major sit velocitas initialis

a, quaeritur, quanta sit haec velocitas, si datum quodlibet spatium percurritur tempore dato: quod tempus autem brevius esse debet eo, quo idem spatium motu e quiete uniformiter accelerato percurritur. Probl. V.

b, Dato quocunque tempore, quo spatium quodlibet a mobili e quiete percurritur, tempus inveniatur, quo per

idem spatium motu uniformiter accelerato descendat mobile, quod datam jam habuerit celeritatem initialem. Probl. VI.

c, Inquiratur in spatium quodam tempore percursum, cognito gradu celeritatis ultimo. Probl. VII.

Nota. Gradus velocitatis, et initialis et finalis, significatur spatio in linea verticali assumto, per quod mobile e quiete descendere debuit, ut velocitatem illam acquirat.

3) Celeritas inveniatur initialis, qua quoddam planum inclinatum a mobili cadente conficiatur tempore eodem, quo idem mobile per elevationem illius plani e quiete descendit. Probl. XII.

4) Quanta est celeritas initialis, qua spatium quoddam in plano inclinato situm conficitur a mobili cadente eodem tempore, quo mobile per idem spatium in linea verticali assumtum motu e quiete uniformiter accelerato descendit. Probl. XV.

II.

Attamen gravissimae eaeque plurimae propositiones sunt illae, quae ad variationem accelerationis spectant. In iis autor ostendit, quomodo acceleratio mutetur, si mobile quoque motus sui directionem mutet. Hoc consilio considerat motum corporis per lineam fractam descendentis, e duabus scilicet rectis compositam, quarum altera, nempe superior, est verticalis, altera ad horizontem versus inclinata. Quae consideratio in eo est posita, ut in conditionem inquiratur,

1) sub qua descensus mobilis per priorem nempe verticalem partem lineae fractae fiat eodem tempore, quo conficitur pars altera, praecedente casu per priorem. Quod ut fiat determinanda sunt

a, longitudo vel inclinatio plani inclinati, dato perpendiculo et elevatione plani. Probl. I,

b, perpendiculum, data indole plani inclinati. Probl. II,

c, longitudo plani inclinati, dato perpendiculo et plani inclinatione. Probl. IV.

[Problemata III, V, VI, VII supra jam commemoravi.]

d, Inclinatio et elevatio plani inclinati, dato perpendiculo et plani longitudine. Theor. XIV et Probl. IX.

Posterius problema etiam pro acclivi plano solvitur. Theor. XV et Probl. X.

Postremo inferior pars lineae fractae planum horizontale esse putatur in theoremate XVI.

2) Consideratio illa supra memorata id quoque sibi vult, ut casus illustretur, quo descensus mobilis per totam lineam fractam fiat eodem tempore, quo conficitur sola pars inferior, scilicet planum inclinatum, motu ex quiete uniformiter accelerato. Quo consilio necesse est determinemus

a, perpendiculum, data longitudine atque directione plani inclinati. Probl. XIII.

b, longitudinem plani, dato perpendiculo et plani inclinatione. Probl. XIV.

Nota. Omnino perseverandum est, has propositiones a Galileo esse allatas, ut variatio accelerationis illustretur: hac enim sola conditione intelligimus, cur nulla ratio sit habita impedimenti, quo mobile per lineam fractam descendens in angulis ejus offenditur.

III.

Quo autem autor, his exceptis, potissimum intendat, e propositionibus: Probl. XI et Theor. XIX, XX, XXI, Theor. XXII ejusque scholio conjici licet. Hae enim propositiones inquisitiones quasdam cognitu dignas continent, quae id spectant, ut intelligatur, quibus conditionibus tempora motuum quorundam, pro specie tantum constitutorum, minima sint existimanda.

Insuper autem incidemus in theoremata ad nullam harum trium partium pertinentia: haec autem, quod attinet ad ipsorum sententiam et rationem, quam ad cetera habent, per se ipsa intelligi possunt. Plura eorum sunt theoremata auxiliaria, c. g. problema VIII et theoremata X, XI.

Ad demonstrationes me conferam.

Theor. X. Propos. X.

„Tempora motuum super diversas planorum inclinationes, quarum elevationes sint aequales, sunt inter se ut eorundem planorum longitudines, sive fiant motus e quiete, sive praecedat illis latio ex eadem altitudine.“

Fiant motus per *ABC* et per *ABD*, fig. 24, usque ad horizontem *DC*, ita ut descensus per *AB* praecedat motibus per

BD et per *BC*. Dico tempus descensus per *BD* ad tempus per *BC* eandem habere rationem, quam habeat longitudo *BD* ad *BC*.

Ducatur *AF* horizonti parallela, ad quam extendatur *DB*, ei occurrens in *F*, et ipsarum *DF*, *FB* media sit *FE*: ductaque *EO* ipsi *DC* parallela, erit tempus per *AB* : tempus per $BF = AB:BF$; quum autem sit

temp. per *AB* : temp. per $AC = AB:AO$ (vid. Coroll. II)

erit temp. per *BF* : temp. per $AC = BF:AO$. Porro autem

temp. per *BF* : temp. per $FD = FB:FE$; ergo

temp. per *AC* : temp. per $FD = AO:FE$. Sed ratio $AO:FE$ aequalis est rationi $AB:BF$, ergo erit temp. per *AC* : temp. per $FD = AB:BF$; hanc autem rationem habent quoque tempora per *AB*, *BF*, itaque temp. per *AC* : temp. per *FD* = temp. per *AB* : temp. per *BF*, unde deducitur (temp. per *AC* — temp. per *AB*) : (temp. per *FD* — temp. per *BF*) = temp. per *AB* : temp. per $BF = AB:BF = BC:CD$. Quod erat ostendendum; nam [temp. per *AC* — temp. per *AB*] est tempus descensus per *BC*, cui jam antecessit motus per *AB*, atque [temp. per *FD* — temp. per *BF*] est temp. per *BD*, antecedente motu per *FB* vel per *AB*.

Theor. XI. Propos. XI.

„Si planum, in quo motus fit e quiete, dividatur utcunque, tempus descensus per priorem partem ad tempus per sequentem eandem habet rationem, quam ipsamet prima pars ad excessum quo eadem pars superatur a media proportionali inter totum planum et primam eandem partem."

Domonstratio facili negotio deduci potest e secundo corollario theorematis II.

Quodsi motus non fiat per continuatam *ACB* sed per fractam *ACD* usque ad horizontem *BD*, cui ex *F* parallela ducta sit *FE* (vid. fig. 25), tempus per *AC* ad tempus per reflexam *CD* rationem $AC:CE$ habet, si *AF* sit media inter *AC* et *AB*. Nam tempus per *AC* ad tempus *CB* habet rationem $AC:CF$, et jam demonstratum est, tempus per *CB* post descensum per *AC* ad tempus per *CD* post eundem descensum per *AC* eandem habere rationem quam *CB* ad *CD* sive *CF* ad *CE*. Ergo ex aequali

tempus per *AC* : tempus per $CD = AC:CE$.

Theor. XII. Propos. XII.

„Si perpendiculum AC fig. 26 et planum utcunque inclinatum DF secentur inter easdem horizontales lineas AF, DC et sumantur media proportionalia AR inter AB, AC et FS inter FB, FD: tempus descensus per perpendiculum AC ad tempus motus per fractam lineam ABD eandem habebit rationem, quam habet tota perpendiculi longitudo AC ad lineam $(AR + SD)$ compositam e media AR in perpendiculo sumta et ex excessu SD, quo totum planum inclinatum FD suam mediam FS superat.“

Connectatur RS, erit ea horizonti parallela, et quum tempus per totam AC ad tempus per partem AB rationem habeat $AC : AR$, si intelligimus AC esse tempus casus per AC erit AR tempus casus per AB, RC tempus per reliquam BC, FD tempus per FD et SD tempus per BD post descensum in BF seu AB. Ergo tempus per totam AC erit ad tempus per fractam ABD ut AC ad $(AR + SD)$.

Idem accidit si loco perpendiculi ponatur aliud planum e.g. NO, eademque est demonstratio.

Problema I. Propos. XIII.

„Ad datum perpendiculum inflectatur planum, in quo, cum ipsum habeat cum dato perpendiculo eandem elevationem, fiat motus post casum in perpendiculo eodem tempore ac in eodem perpendiculo ex quiete.“

Sit datum perpendiculum AB fig. 27 cui extenso in C ponatur pars BC aequalis et ducantur horizontales CE, AG, oportet e B planum usque ad horizontem inflectere, in quo fiat motus post casum ex A eodem tempore quo linea AB percurritur ex quiete in A.

Ponatur $CD = CB$ et, ducta BD, applicetur $BE = (BD + BC)$: dico BE esse planum quaesitum. Extendatur enim EB usque ad horizontem AG, sitque GF media inter GB, GE, erit $EF : FB = EG : GF$, itaque $EF^2 : FB^2 = EG^2 : GF^2 = EG : GB$; est autem $EG = 2GB$; ergo erit $EF^2 = 2BF^2$ et quum sit $DB^2 = 2BC^2$ erit $EF : FB = DB : BC$ et, componendo et permutando, $EB : DB + BC = BF : BC$; sed ex constructione est $EB = DB + BC$, ergo BF ipsi BC seu AB aequalis est. Constat autem secundum theorema XI, tempus per

AB ad tempus per BE post casum ex A eandem habere rationem quam AB ad BF. Sed haec ratio est ratio aequalitatis.

Problema II. Propos. XIV.

„Dato perpendiculo et plano ad id inclinato pars reperiatur in perpendiculo superiori, quae ex quiete conficiatur tempore aequali ei, quo conficitur planum inclinatum post casum in reperta perpendiculi parte.“

Sit perpendiculum DB fig. 28 et planum ad id inclinatum AC. Ducatur horizontalis CB; deinde fiat $(BA + 2AC) : AC = AC : AE$ et $BA : AC = EA : AR$. Quibus factis e puncto R descendat in lineam BD perpendiculum RX, dico XA esse quaesitam perpendiculi partem.

E rationibus enim $(BA + 2AC) : AC = AC : AE$ et $BA : AC = EA : AR$ hae rationes deducuntur

$$(BA + AC) : AC = CE : AE \text{ et}$$
$$(BA + AC) : AC = ER : AR,$$

e quibus sequitur $CE : AE = ER : AR$; unde derivatur

$$(CE + ER) : (AE + AR) = ER : AR$$
$$\text{sive} \quad CR : ER = ER : AR;$$

itaque sunt CR, ER, AR proportionales.

Porro autem habemus $AB : AC = AE : AR$, ex constructione, et $AB : AC = AX : AR$ ob similitudinem triangulorum ABC, AXR; ergo $AE : AR = AX : AR$; itaque est $AE = AX$, unde ex sententia theorematis XI deducitur tempus per XA esse aequale tempori per AC post casum ex X.

Problema III. Propos. XV.

„Dato perpendiculo et plano ad ipsum inflexo pars reperiatur in perpendiculo infra extenso, quae tempore eodem conficiatur, quam planum inflexum post casum e dato perpendiculo.“

Sit in fig. 29 perpendiculum AB et planum ad id inflexum BC, oportet in perpendiculo infra extenso partem reperiri, quae casu ex A eodem tempore conficiatur, quo BC casu ex A conficitur.

Ducta linea horizontali AD, extensaque BC in D, sit inter CD, DB media DE et fiat $BF = BE$ et $AB : AF = AF : AG$: dico BG esse spatium quaesitum. Nam si ponimus AB esse tempus per AB, erit BD tempus per DB et secundum theorema XI

BF tempus per BG, BE tempus per BC post casum ex A. Sed ex constructione est $BF = BE$.

Theorema XIII. Propos. XVI.

„Si plani inclinati et perpendiculi partes EC, EB fig. 30, quorum tempora casuum ex quiete sint aequalia, ad idem punctum E componantur, mobile veniens e qualibet altitudine sublimiori AE citius absolvet plani inclinati partem EC, quam ipsam partem perpendiculi EB.“

Jungatur CB et ducta horizontali AD extendatur CE usque ad D et sit DF media inter CD, DE et AG media inter AE, AB, et ducantur FG, DG, constat ex ante jam demonstratis EF esse tempus descensus per EC et EG tempus per EB, praecedente casu per AE ex quiete in A, si AE tempus esse per AE intelligamus. Itaque tantum necesse est demonstremus, lineam EG esse longiorem quam EF.

Quum tempora descensuum per EC, EB ex quiete in E sint aequalia, erit secundum corollarium II propositionis VI angulus C rectus, itaque ob similitudinem triangulorum BCE et ADE est $BE : EC = DE : AE$ et $BE . AE = EC . DE$. Quum vero $CD . DE = CE . DE + DE^2$ et $BA . AE = BE . AE + AE^2$, invenimus $CD . DE - AB . AE = DE^2 - AE^2 = AD^2$; porro autem est $CD . DE = DF^2$ et $AB . AE = AG^2$; ergo erit $DF^2 - AG^2 = AD^2$; est autem jam secundum theorema Pythagor. $DG^2 - AG^2 = AD^2$, concluditur igitur lineas DF et DG esse aequales. Itaque erit angulus $DGF = DFG$ et angulus FGE minor angulo DFG seu EFG; ergo necesse est longior sit linea EG quam EF.

Corollarium.

„Ex his constat spatium, quod conficitur in perpendiculo post casum ex sublimi tempore eodem quo percurritur planum inclinatum, minus esse eo, quod conficitur tempore eodem quam in inclinato non praecedente casu ex sublimi, majus tamen quam idem planum inclinatum.“

Problema IV. Propos. XVII.

„Dato perpendiculo et plano ad ipsum inflexo pars in dato plano signetur, in qua post casum in perpendiculo fiat motus tempore aequali ei, quo mobile datum perpendiculum ex quiete confecit.“

Sit perpendiculum *AB* fig. 31 et planum inclinatum *BE*, ducatur linea horizontalis *AD*, cui occurrat in *D* planum extensum et sumatur $BF = BA$; denique fiat $DB : DF = DF : DE$. Dico *BE* esse partem plani inclinati quaesitam, quia sit $BF = BA$ et, posito tempore per *AB* aequali *AB*, constet secundum theorema XI tempus per *BE* post casum *AB* esse illam *BF*.

Problema V. Propos. XVIII.

„Dato in perpendiculo quovis spatio a principio motus signato, quod in dato tempore conficitur, datoque quocunque alio tempore minori, reperiatur in perpendiculo eodem aliud aequale spatium, quod in dato tempore minori conficiatur.“

Sit illud spatium in perpendiculo signatum *AB* fig. 32, cujus tempus e principio *A* sit *AB*, sitque horizon *CBE*, datumque tempus ipso *AB* minus sit aequale lineae *BC* in horizonte notatae: oportet in eodem perpendiculo spatium eidem *AB* aequale reperiri, quod tempore *BC* conficiatur.

Ducatur linea *AC* et constituatur angulus *CAE* angulo *ACB* aequalis et linea *ED* perpendicularis ad *AE*, denique linea *DF* ipsi *AB* secetur aequalis, erit *FD* illa perpendiculi pars, quae motu uniformiter accelerato ex quiete in *A* conficitur dato tempore *BC*. Constat enim ex elementis geometriae, lineam *AE* esse mediam inter *AD*, *AB* et *BE* mediam inter *AB*, *BD* sive inter *AB*, *AF*, nam *FA* ipsi *DB* aequalis est: itaque quum posuerimus *AB* esse tempus per *AB*, erit *AE* sive *EC* tempus per totam *AD* et *EB* tempus per *AF*; reliqua igitur *FD* tempore $(CE - BE) = BC$ percurretur.

Problema VI. Propos. XIX.

„Dato in perpendiculo *AB* fig. 33 spatio quocunque *AC* a principio motus percurso, datoque casus tempore, tempus reperiatur, quo aliud aequale spatium *BD*, ubicunque in eodem perpendiculo descriptum, ab eodem mobili consequenter conficiatur.“

Describatur semicirculus *AEB* et ex *C* ad *AB* perpendicularis sit *CE* et ducatur *AE*, in qua denique secetur *EF* ipsi *EC* aequalis: reliqua pars *AF* tempus descensus per *DB* significabit, si cognitum tempus per *AC* ipsi lineae *AC* aequale putatur. Quum enim *AE* sit tempus per totam *AB* et *CE* seu

EF tempus per *AD* (nam *CE* media est inter *AC*, *CB* seu inter *AC*, *AD*), spatium *DB* motu uniformiter accelerato ex quiete in *A* tempore $(AE - EF) = AF$ conficiatur necesse est.

Corollarium.

„Hinc colligitur, quod si cujusdam spatii ponatur tempus ex quiete esse ut ipsummet spatium, tempus illius post aliud spatium adjunctum erit excessus medii inter adjunctum una cum spatio et ipsum spatium super medium inter primum et adjunctum.“

Problema VII. Propos. XX.

„Dato quolibet spatio *CB* fig. 34, et parte *CD* in eo post principium motus, partem alteram versus finem *B* reperiri, quae conficiatur tempore eodem, quo percurritur prima data *CD*.“

Sumatur media inter *BC*, *CD*, cui aequalis ponatur *BA*, et ipsarum *BC*, *CA* tertia proportionalis sit *CE*, erit *EB* illud spatium quaesitum, quod post casum ex *C* tempore dato conficitur. Si enim intelligimus, tempus per totam *CB* esse lineam *CB* ipsam, erit *BA* tempus per *CD*. Quum autem *AC* media sit inter *BC*, *CE*, erit *CA* tempus per *CE*; ergo erit *BA* tempus per reliquam *EB* post casum ex *C*. Eadem vero linea *BA* erat tempus per *CD*; ergo spatia *CD* et *EB* motu ex quiete in *C* temporibus aequalibus conficiuntur.

Theorema XIV. Propos. XXI.

„Si in perpendiculo fiat motus ex quiete, in quo a principio lationis sumatur pars *AC* fig. 35 quovis tempore percursa, post quam sequatur motus inflexus per planum utcunque inclinatum *CG*; spatium, quod in tali plano conficitur tempore aequali tempori casus jam peracti in perpendiculo ad spatium in perpendiculo percursum majus erit quam duplum, minus vero quam triplum.“

Ponatur enim *CE* aequalis spatio verticali *AC*, et, extenso plano usque ad horizontem *AE*, fiat $EC : EF = EF : EG$, constat e theoremate XI spatium *CG* esse illud, quod tempore eodem conficiatur (praecedente motu per *AC*), quo mobile ex quiete in *A* perpendiculi partem *AC* percurrerit. Itaque restat ut ostendatur hoc spatium *CG* ipso *CA* majus esse quam duplum sed minus quam triplum.

E ratione $EC:EF=EF:EG$ deducitur $CF:FG=EC:EF$; quum autem EC minor sit quam EF, erit quoque linea CF minor quam FG, itaque tota CG major quam dupla ad FC seu AC.

Porro autem linea EF minor est quam dupla EC (est enim EC major quam CA seu CF), erit igitur GF minor quam dupla linea FC et GC, quae est aequalis $(GF+FC)$, minor quam tripla FC seu tripla AC. —

„Poterat autem universalius idem proponi: quod enim accidit in perpendiculo et plano inclinato, id etiam contingit si post motum in plano quodam inclinato mobile inflectatur per magis inclinatum, quod conspicitur in altera fig. 35: cujus rei eadem est demonstratio.“

Problema VIII. Propos. XXII.

„Datis duobus temporibus inaequalibus A, B fig. 36 et spatio CD, quod in perpendiculo ex quiete conficitur tempore B breviori ex datis: a puncto C supremo perpendiculi usque ad horizontem planum inflectatur, per quod mobile descendat tempore A longiori ex datis.“

Fiat $B:A=CD:CX$, constat e theoremate III, quod jam in praecedente capite tractavimus, illam lineam CX esse planum quaesitum, per quod mobile ex quiete in C tempore A descendat.

Problema IX. Propos. XXIII.

„Dato spatio quovis tempore peracto ex quiete in perpendiculo: e termino imo hujus spatii planum inflectatur, in quo post casum in perpendiculo tempore eodem conficiatur spatium cuilibet spatio dato aequale: quod tameu majus sit quam duplum minus vero quam triplum spatii in perpendiculo percursi.“

Sit in perpendiculo AS fig. 37 tempore AC ex quiete in A percursum spatium AC, cujus IR majus sit quam duplum minus vero quam triplum: oportet e termino C planum inflectere, in quo mobile eodem tempore AC conficiat post casum per AC spatium ipsi IR aequale.

Sint RN, NM ipsi AC aequales et quam rationem habet IM ad MN eandem habeat linea AC ad aliam, cui aequalis describatur CE ex C ad horizontem AE: qua versus O extensa sumantur CF, FG, GO aequales ipsis RN, MN, MI. Dico tem-

pus descensus per planum CO post casum AC aequale esse tempori AC, quo spatium AC ex quiete in A percurritur.

E proportione $OG:GF = FC:BE$ deducitur

$$OF:FG = FE:EC \text{ seu, quum sit}$$

$$FG = FC,\; OF:FC = FE:EC, \text{ unde derivatur}$$

$$(OF + FE):(FC + EC) = FE:EC \text{ sive}$$

$$OE:FE = FE:EC,$$

quae proportio nobis indicat lineam FE esse mediam inter EC et EO. Quare contendere possumus secundum theorema XI, tempus per AC ad tempus per CO eandem habere rationem, quam habeat linea AC ad CF. Sed haec ratio est ex constructione ratio aequalitatis.

Scholium.

Manifestum est planum inclinatum eo propius accedere ad perpendiculum in quo ipso mobile tempore aequali AC percurrit spatium triplo majus quam AC, quo minus data linea IR differat a triplo ipsius AC. Quum enim IR proxima fuerit a triplo lineae AC, erit IM ipsi MN fere aequalis. Linea IM vero ad MN ex constructione eandem habet rationem, quam habet AC ad CE; itaque constat, ipsam CE paulo majorem reperiri quam CA. Unde concludimus punctum E proximum esse puncto A et lineas CO, CS acutissimum angulum constituere et fere inter se osculari.

Contra si data IR paulo tantum major fuerit quam dupla AC, erit IM brevissima linea: unde patet, minimam quoque futuram esse AC, si respicias lineam CE, quae longissima erit et quam proxime accedet ad parallelam horizontalem per C ductam.

Hinc concludi potest, si, casu quodam per spatium verticale AC peracto, motus vertatur in planum horizontale, spatium confectum tempore aequali tempori casus perpendicularis antecedentis, duplo esse majus, quam illud spatium perpendiculare. Hoc etiam magis elucet, si in memoriam redigimus spatium, quod motu uniformiter (ex quiete) accelerato conficitur, eodem tempore aequabiliter percurri cum dimidia velocitate finali motus aequabiliter accelerati. Quum igitur duplex velocitas percurrat duplex spatium, dubitandum non est quin, si quid mobile, quod e quiete uniformiter acceleratum cecidit, cum velocitate finali

uniformiter protinus movetur, nunc eodem tempore duplex spatium percurrat. Hoc vero contingit in plano horizontali, quia in eo neque accelerationis nec retardationis causa exsistit. —

Galileus nunc ad considerandos motus corporum pergit, quae in planis inclinatis ascendunt; et ratione aptissima primo eorum naturam exponit. Ratio ejus cogitandi hinc concludi potest.

Velocitatis gradus, quem mobile quoddam habet per se mutari non potest, nisi exstant externae causae accelerationis aut retardationis. Quum igitur causa accelerationis et retardationis in motibus corporum libere cadentium sit eorum gravitas, momentumque hujus potestatis in plano omnino horizontali cesset: quodvis mobile in tali plano continuo uniformiter movebitur, nisi forte alia impedimenta accedunt, aut si quiescebat, in quiete perseverabit. Longe aliter est, si mobile in plano inclinato versatur, quia hac conditione gravitatis momentum inclinationi respondens deorsum semper pellit mobile. Cujus momenti effectus jam satis intelleximus atque exposuimus in motibus per plana inclinata descendentium corporum; qua de causa non amplius difficile erit exploratu, quam vim habeat illud momentum in retardationem motus corporum in planis inclinatis ascendentium.

Quum hunc motum compositum esse putare liceat e motu aequabili sursum versus atque ex uniformiter accelerato deorsum versus, qui gravitate effectus est, in id tantum inquirendum nobis erit, quomodo hi motus oppositi inter se exaequentur, cui rei figuram 38 adhibebimus. Itaque cogitemus factum esse descensum per planum declive *AB*, ex quo per aliud acclive *BC* continuetur motus reflexus; deinde sint primo plana aequalia et ad aequales angulos super horizontem elevata. Jam constat, quod mobile ex quiete in *A* descendens in *AB* gradus acquirat velocitatis secundum rationem temporis incrementi, gradum in *B* maximum esse graduum acquisitorum et ex ipsius natura immutabiliter mobili impressum, sublatis causis accelerationis novae aut retardationis, accelerationis, si mobile super extenso plano ulterius progrederetur, retardationis, si super planum acclive fit reflexio: in horizonte autem *GH* aequabilis motus secundum gradum velocitatis in *B* acquisitum in infinitum extenderetur, qui gradus tantus esset, ut tempore, aequali tempori descensus per *AB*, in horizonte spatium ipsius *AB* duplex conficeretur. Fingamus idem mobile eodem celeritatis gradu aequabiliter moveri

per planum *BC* et conficere spatium ipsius *AB* duplum tempore aequali tempori descensus per *AB*. Sed si perpendimus, simulatque mobile ascendere incipit, illi motui admisceri descensum quendam ex quiete secundum gradus eosdem accelerationis, quibus mobile tempore eodem tantum descendat in plano acclivi, quantum descendit per *AB*: manifestum est, ejusmodi mixtione motus aequabilis ascendentis et uniformiter accelerati descendentis perduci mobile per planum *BC* ad terminum *C*. Mobile vero planum acclive *BC* non solum eodem tempore percurrit, quo cecidit per planum *AB*, sed etiam in aequalibus ab horizonte distantiis, e. g. in *D* et *E* aequales velocitates habet, ideoque gradus velocitatis casu per *AB* acquisitos eadem ratione omittit, secundum quam eos acquisivit, nempe secundum temporis incrementum. Motus ejus igitur aptissime uniformiter retardatus vocari potest. Esse autem gradus velocitatis in punctis *D* et *E* aequales sic demonstratur.

Ducta *DF* parallela *BC*, constat descensum per *AD* reflecti per *DF*, itaque si post *D* mobile feratur per horizontalem *DE*, impetus in *E* erit aequalis velocitati in *D* et mobile ex *E* ascendet in *C*: ergo gradus velocitatis in *D* est aequalis gradui in *E*, si quid mobile e quiete in *A* lineam fractam *ADBEC* percurrit.

Ex his concludere possumus mobile, si descenderit per *AB*, in plano reflexo ferri usque ad horizontalem *AC*, non solum si inclinationes planorum aequales, sed etiam si inaequales sint: assumtum enim prius est, gradus velocitatis esse aequales, qui in planis inaequaliter inclinatis acquiruntur, si planorum elevationes aequales sunt. Quum enim aequalibus inclinationibus planorum *EB*, *BD* fig. 39 descensus per *EB* impellere valet mobile, per planum *BD* usque ad *D* et impetus in *B* idem est, seu mobile per *AB* seu per *EB* descendit: constat mobile pariter expelli per *BD* post descensum per *AB*, quam post *EB*. Sed accidit, ut tempus ascensus per *BD* eo longius sit quam per *BC* quo longius sit descensus per *EB* quam per *AB*. Jam autem demonstratum est, haec tempora eandem rationem habere, quam habeant planorum longitudines.

Theor. XV. Propos. XXIV.

„Dato inter easdem parallelas horizontales *BC*, *HG* fig. 40 perpendiculo *AE* et plano *EB* elevato ab ejus imo termino, spa-

tium, quod a mobili post casum in perpendiculo in plano elevato conficitur tempore aequali tempori casus majus est ipso perpendiculo, minus tamen quam duplum ejusdem perpendiculi."

Ponatur linea ED ipsi AE aequalis et fiat $EB:BD = BD:BF$, si intelligimus tempus per AE esse AE, erit BE tempus descensus vel ascensus per EB et BD tempus per BF et reliqua DE tempus descensus per reliquam FE.

Sed idem est tempus per FE e quiete in B, atque tempus ascensus per EF, itaque quum sit $DE = AE$, erit EF spatium illud a mobili ascendente tempore dato percursum. Restat igitur ut demonstretur, EF majus esse quam AE, minus vero quam duplum ejusdem lineae.

E proportione $EB:BD = BD:BF$ deducitur $EB:BD = DE:EF$; est autem EB major quam BD, ergo et DE major quam DF, et EF minor quam dupla DE seu AE.

Theor. XVI. Propos. XXV.

„Si post casum per planum inclinatum AB fig. 41 fiat motus per planum horizontis BC, erit tempus casus per planum inclinatum ad tempus per quamlibet lineam horizontis BD, ut dupla longitudo plani $2 \cdot AB$ ad lineam acceptam horizontis BD."

Sumta enim $BC = 2AB$, constat tempus casus per AB esse aequale tempori, quo uniformiter conficitur spatium BC. Sed tempus motus per BC ad tempus motus per DB habet rationem $CB:BD$ sive $2AB:BD$; ergo habet tempus descensus per AB ad tempus motus per BD eandem rationem, quam dupla AB ad BD.

Problema X. Propos. XXVI.

„Dato perpendiculo AB fig. 42 inter lineas parallelas horizontales AO, BC datoque spatio EF majori eodem perpendiculo sed minori quam duplo ejusdem, ex imo termino perpendiculi B planum constituatur inter easdem horizontales, in quo motu reflexo post descensum in perpendiculo conficiat mobile spatium dato aequale et tempore aequali tempori descensus in perpendiculo."

Ponatur $EB = AB$ et $DI = DF$ et fiat $EI:ID = DF:FX$ denique describatur linea BO aequalis lineae EX, dico BO esse planum quaesitum.

Lineis ED, DF aequales ponantur BR, RS: e proportione $EI:ID = FD:FX$ derivatur $ED:DI = DX:XF$ seu $ED:DF = DX:XF = EX:XD$ sive $BO:OR = OR:OS$, itaque si ponamus tempus per AB esse AB, erit OB tempus per OB et OR tempus per OS et reliqua BR tempus descensus per reliquam SB. Sed tempus descensus per SB ex quiete in O est aequale tempori ascensus ex B in S post descensum $AB:BO$ igitur est planum in quo post descensum per AB tempore $BR = AB$ conficitur spatium BS, spatio dato EF aequale.

Theor. XVII. Propos. XXVII.

„Si in planis inaequalibus AC, AB fig. 43, quorum eadem sit elevatio AD, descendat mobile: spatium quod in ima parte longioris conficitur tempore aequali ei, quo conficitur totum planum brevius, est aequale spatio, quod componitur ex ipso breviori plano et e parte, ad quam idem brevius planum eam habet rationem, quam habet longius ad excessum quo longius brevius superat.“

Sumatur $EC = AB$ et quam rationem habet totum CA ad AE, eam habeat CE ad EF. Dico spatium FC confici tempore aequali tempori descensus per AB. Quum enim sit $CA:AE = CE:EF$, erit $AF:AE = AE:AC$; itaque, si ponatur tempus per AB esse AB, erit AC tempus per AC, AE tempus per AF, et EC erit tempus per reliquam FC.

Est autem $CE = AB$.

Theor. XVIII. Propos. XXVIII.

„Tangat horizontalis linea, AG fig. 44 circulum et a contactu sit diametra AB et duae chordae AE, EB. Determinetur ratio temporis casus per AB ad tempus per duas AEB.“

Extendatur BE usque ad tangentem in G et secetur $GF = GA$, constat GF esse mediam inter BG, GE. Itaque si ponimus AE esse tempus per AE, erit GE tempus per GE, et GF tempus per totam GB, et EF tempus per EB post descensum ex G sive ex A per AE. Tempus igitur per AE seu per AB ad tempus per AEB rationem habet $AE:(AE + EF)$; quae ratio invenienda erat.

Problema XI. Propos. XXIX.

„Dato quolibet spatio horizontali BC fig. 45, e cujus termino B erectum sit perpendiculum, in quo sumatur pars BA

aequalis dimidiae parti spatii BC: mobile ex tali altitudine descendens conficiet spatium horizontale una cum perpendiculo breviori tempore, quam quodcunque aliud spatium BE perpendiculi cum eodem spatio horizontali."

Sit sumta linea BE major, ut in altera figura, vel minor quam AB, ut in altera figura: ostendendum est, tempus quo conficiuntur spatia BE, BC longius esse tempore, quo AB, BC percurruntur.

Intelligatur tempus per AB esse AB, erit AB quoque tempus per spatium BC, et per ambo spatia tempus erit $= 2AB$. Sit BO media inter EB, AB, ita ut BO sit tempus casus per EB; sit praeterea horizontale spatium $BD = 2BE$; constat tempus ipsius post casum EB esse idem BO. Fiat $DB:BC$ sive $EB:BA = OB:BN$; quum motus in horizonte sit aequabilis, et OB tempus sit per BD post casum ex E, erit NB tempus per BC post casum ex eadem altitudine E. Unde patet $(OB + NA)$ esse tempus per EBC. Itaque ostendendum est, esse $(OB + BN) > 2AB$. Quum BO media sit inter EB, BA, ratio $EB:BA$ dupla est rationis $OB:BA$, et quum sit $EB:BA = OB:BN$ erit quoque ratio $OB:BN$ dupla rationis $OB:BA$. Sed ipsa ratio $OB:BN$ componitur e rationibus $OB:BA$ et $AB:BN$, ergo ratio $AB:BN$ rationi $OB:AB$ aequalis est. Sunt igitur lineae BO, AB, BN proportionales, unde patet esse

$$(OB + BN) > 2AB.$$

Theor. XIX. Propos. XXX.

„Si ex quodam puncto B fig. 46 horizontis descendat perpendiculum BE, ex alio vero puncto C in eadem horizontali sumto usque ad perpendiculum planum describendum sit, per quod mobile tempore brevissimo usque ad perpendiculum descendat: tale planum erit illud, CA, quod de perpendiculo abscindit partem BA aequalem distantiae BC puncti C a termino perpendiculi."

Ductis lineis CD, AD ipsis BE, BC parallelis, describatur circulus $ACMN$: cujus centrum sit in D: non solum linea horizontalis BC, sed etiam perpendiculum AB circulum illum tanget. Quum autem constet ex theoremate VI, omnes chordas ex sublimi circuli puncto descendentes, e. g. CH, CA, CG aequalibus temporibus percurri, et tantum unum punctum A lineae BE

situm sit in circuli circumferentia, dum omnia alia ejus puncta e. g. *F*, *E* extra circulum versentur, tempus descensus in planis *CHF*, *CGE* ubicunque designatis longius erit, quam tempus descensus per *CA*.

Theor. XX. Propos. XXXI.

„Si linea recta *CD* fig. 47 super horizontem *AB* utcunque fuerit inclinata: planum *AF* a dato puncto *A* in horizonte usque ad inclinatam exstensum, in quo descensus sit tempore omnium brevissimo, est illud, quod bifariam dividit angulum *CAE* contentum a duobus perpendicularibus *AC*, *AE* a dato puncto extensis altera ad horizontem altera ad inclinatam.“

Ducatur *FG* ipsi *AE* parallela, erunt anguli *GFA*, *FAE* aequales: est autem angulus *EAF* angulo *FAG* aequalis, ergo linea $FG = GA$. Itaque, si centro *G* et radio *GA* circulus describitur, is et horizontem et inclinatam in punctis *A*, *F* tanget: unde patet lineas omnes a puncto *A* usque ad inclinatam ductas extra circuli circumferentiam versari et descensum in iis longiori tempore absolvi, quam in *AF*.

Lemma I.

„Si duo circuli sese intus contingant, quorum interiorem quaelibet linea recta contingat, exteriorem vero secet, tres lineae a contactu circulorum ad tria puncta rectae lineae tangentis, nempe ad contactum interioris circuli et ad sectiones exterioris protractae angulos in contactu circulorum aequales continebunt.“

Theor. XXI. Propos. XXXII.

„Si in horizonte sumantur duo puncta et ab altero eorum quaelibet linea versus alterum inclinetur, e quo ad inclinatam recta linea ducatur, ex ea partem abscindens aequalem ei, quae inter puncta horizontis intercipitur, casus per hanc ductam citius absolvetur, quam per quascunque alias rectas ex eodem puncto ad eandem inclinatam protractas. In iis autem, quae per angulos aequales hinc inde ab hac distiterint, casus fiunt temporibus inter se aequalibus.“

Sint in horizonte duo puncta *A*, *B* fig. 48, et ex *B* inclinetur recta *BC*, in qua e termino *B* sumatur $BD = AB$ et ducatur *AD*. Dico casum per *AD* velocius fieri quam per quamlibet

lineam ex *A* ad inclinatam *BC* ductam. E punctis *A*,*D* ad ipsas *BA*,*BD* demittantur perpendicula *AE*,*DE*, erit *AE*=*DE* (pars enim *BD* aequalis est assumta distantiae *BA*) et circulus circa centrum *E* descriptus, radio *AE* seu *ED*, tangetur et linea horizontali *BA* in suo sublimi puncto *A*, et linea inclinata *BC* in puncto *D*. Unde patet, mobile per lineam *AD* citius descendere quam per quamcunque aliam rectam, quae a puncto *A* usque ad eandem inclinatam ducta est.

Si denique in extenso perpendiculo *AE* sumatur quodvis centrum, circa quod, radio *FA* describitur circulus *AGC*, lineam tangentem in punctis *G*.*C* secans: ductae lineae *AG*, *AC* secundum lemma antecedens angulum, qui a linea *AD* bifariam dividitur, continebunt et a mobili ex quiete descendente secundum theorema VI aequalibus temporibus percurrentur.

Problema XII. Propos. XXXIII.

„Dato perpendiculo *AB* fig. 49 et plano ad ipsum inclinato *AC*, quorum eadem sit altitudo, idemque terminus sublimis *A*: in perpendiculo supra terminum illum punctum reperiatur, ex quo mobile descendere debet, ut ipsum planum eodem tempore conficiatur, quo perpendiculum *AB* ex quiete in *A* percurritur.“

Demittatur perpendiculum *DCE* ad *AC* et, posita *CD* aequali *AB*, ducatur *AD*; fiat angulus *DAE*=*ADE* et ad *AE* perpendicularis sit *EF*, plano inclinato extenso occurrens in *F*, et utraque *AI*, *AG* ponatur ipsi *CF* aequalis, denique per *G* ducatur *GH* horizonti parallela. Dico *H* esse punctum quaesitum. Intelligatur enim tempus descensus per perpendiculum *AB* esse *AB*, erit *AC* tempus per inclinatam *AC* ex quiete in *A*. Quum autem ex constructione *EC* perpendicularis sit ad *AF*, erit *AE* media inter *FA*, *AC* et *CE* media inter *AC*, *FC* seu inter *AC*, *AI*. Itaque erit *AE* tempus totius *AF* et *EC* tempus per *AI*. Sed in triangulo *AED* est *AE*=*ED*, quare *ED* quoque tempus est per *AF*; ergo *CD* sive *AB* erit tempus per *IF* ex quiete in *A*, seu, quod idem est, tempus per *AC* ex quiete in *G* sive in *H*.

Problema XIII. Propos. XXXIV.

„Dato plano inclinato *AB* fig. 50 et perpendiculo *AC*, quorum idem sit sublimis terminus *A*, punctum sublimius in perpen-

diculo extenso reperiatur, ex quo mobile decidens et per planum *AD* conversum, partem perpendiculi superiorem et planum *AB* eodem tempore conficiat, quo solum planum inclinatum *AB* ex quiete in *A* percurritur."

Sit *BC* horizon et sumatur $AN = AC$, fiat $AB:BN = AL:LC$, ipsique *AL* ponatur aequalis *AI* et linearum *AC*, *BI* tertia proportionalis sit *CE*. Denique describatur in extenso perpendiculo supra *A* pars $AX = CE$. Dico *X* esse punctum quaesitum.

Ducatur horizontalis *XR*, cui occurrat *BA* in *R*, deinde describatur *ED* parallela horizonti et supra *AD* semicirculus; in *B* ad lineam *AD* perpendiculum *BF* constituatur. Patet *FB* esse mediam inter *AB*, *BD*, et *FA* mediam inter *DA*, *AB*. Ponatur $BS = BI$ et $FH = FB$: quum sit $AB:BD = AC:CE$ et *BF* media inter *AB*, *BD* atque *BI* media inter *AC*, *CE*, erit $BA:AC = FB:BS$ sive $BA:AN = BF:BS$, unde sequitur $BF:FC = AB:BN = AL:LC$; ergo $BF.CL = AL.SF$.

Quum autem $FB.CL = AC.BF - AL.BF$ et $AL.SF = AL.BF - AL.BS = AI.BF - AI.IB$, erit $AI.BF - AI.IB = AC.BF - AL.BF$, itaque, quum $AC.BF = AB.BI$, erit $AB.BI - AI.BF = AI.BF - AI.IB$; quum autem $AI.BF = AI.FH$, erit $AB.BI - AI.FH = AI.FH - AI.IB$ itaque $2AI.FH = AB.BI + AI.IB = 2AI.IB + BI^2$. Ergo $2AI.FH + AI^2 = AI^2 + 2AI.BI + BI^2 = AB^2$. Quum vero $FH^2 = BF^2$, erit $AI^2 + 2AI.FH + FH^2 = AB^2 + BF^2 = AF^2$; itaque $(AI + FH)^2 = (AH + FH)^2$; ergo $AI = AH$.

Si intelligamus tempus per *AB* esse *AB*, erit *AC* tempus per *AC*, et *IB* media inter *AC*, *CE* erit tempus per *CE* seu per *XA* ex quiete in *X*. Quum autem inter *DA*, *AB* seu *BR*, *BA* media sit *AF*, et $BF = FH$ media sit inter *AB*, *BD* vel *RA*, *AB* erit *AH* sive *AI* tempus per *AB* ex quiete in *R* seu post casum ex *X*; sed tempus ejusdem *AB* ex quiete in *A* fuit linea *AB* ipsa; ergo erit tempus per $XAB = IB + AI = AB$, quod aequale est tempori per solam *AB* ex quiete in *A*.

Problema XIV. Propos. XXXV.

„Data linea ad datum perpendiculum inflexa, in inflexa pars sumatur, in qua sola ex quiete fiat motus eodem tempore, quo eadem cum perpendiculo conficitur."

Sit *BC* fig. 51 planum inclinatum, *BA* perpendiculum et *AE* linea horizonti parallela cui occurrat *CB* in *E*. Constituta in puncto *B* linea ad *EC* perpendiculari et utrinque extensa, ponatur $BH = BE - AB$ et angulo *BHE* describatur angulus *HEL* aequalis; ipsa autem *EL* occurrat *BK* in *L* et constituatur in puncto *L* ad *EL* perpendiculum *LM*. Dico *BM* esse spatium quaesitum. Quum enim angulus *MLE* sit rectus, erit *BL* media inter *BM*, *BE* et *LE* media inter *ME*, *EB*. Sumta *EN* aequali *EL* erunt linea *NE*, *EL*, *LH* aequales et *HB* erit excessus lineae *NE* super *BL*. Sed eadem *HB* est etiam excessus *NE* super $NB + BA$; ergo est $BL = NB + BA$. Itaque si ponatur *EB* esse tempus per *BE* erit *BL* tempus per *BM* ex quiete in *B* et *BN* tempus ejusdem post casum per *EB* seu *AB*; atque *AB* erit tempus per *AB*. Ergo tempus per *ABM* est aequale tempori per solam *BM* ex quiete in *B*.

Lemma II.

„Si in fig. 52 *CD* est perpendicularis ad diametrum *BA*, et descriptum est utcunque linea *BDE*, ducta linea *BF* media erit inter *DB*, *BE*."

Lemma III.

„Si linea *AC* fig. 53 longior est quam *DF*, atque ratio $AB:BC$ superat rationem $DE:EF$: erit *AB* longior quam *DE*."

Lemma IV.

„Sit in fig. 54 *ACIB* circuli quadrans, et ex *B* ducatur *BE* parallela lineae *AC*; deinde describatur circa quodlibet centrum in linea *BE* assumtum circulus *BOES*, qui secat quadrantem in *I*, Si ducamus *COB* et *CI*, linea *CI* semper erit minor quam linea *CO*."

„Idem accidit etiamsi arcus *BIC* minor sit quadrante."

Demonstrationem horum lemmatum negligere mihi liceat.

Theor. XXII. Propos. XXXVI.

„Si in circulo *CBD* fig. 55, ad horizontem erecto, ab imo puncto *C* elevetur planum *CD* non quadrante majorem arcum subtendens, a terminis cujus duo alia plana *DB*, *CB* ad quodlibet circumferentiae punctum *B* inflectuntur: descensus in planis ambobus inflexis breviori tempore absolvetur, quam in solo priori plano elevato *DC*, vel quam in altero tantum ex illis duobus nempe inferiori *BC*."

Ductus sit horizon MDA, cui occurrat CB in A, sintque DN, MC ad MD et BN ad BD perpendiculares. Circa triangulum DBN semicirculus describatur $DFBN$, et linearum CD, DF media proportionalis sit DO, AV autem media inter AC, AB.

Sit denique PS tempus, quo conficitur tota DC vel BC, et quam rationem habet CD ad DO, eandem habeat tempus per SP ad tempus PR; erit tempus PR id, quo mobile ex D percurrit lineam DF, RS vero id, quo reliqua FC conficitur. Quum autem PS quoque sit tempus per BC ex quiete in B si fiat $BC:CD = SP:PT$, erit PT tempus descensus ex A in C, quum DC media sit inter AC, CB secundum lemma II. Fiat autem $CA:AV = TP:PG$, erit PG tempus per AB, GT vero tempus motus per BC, praecedente casu per AB. Quum autem linea verticalis sit diametra DN, lineae DF, DB temporibus aequalibus conficiuntur. Quare si demonstratum fuerit, mobile citius percurrere BC post casum DB, quam FC post descensum in DF, intentum habebimus.

Jam explicavimus, tempus, quo conficitur BC post AB vel post DB esse GT; tempus autem ipsius FC post DF esse RS. Itaque ostendendum est tempus RS majus esse quam GT. Ex constructione valent tres proportiones hae:

1) $SP:PR = CD:DO$ 2) $SP:PT = DC:CA$ et
3) $TP:PG = CA:AV$. Ex prima derivatur
$RS:SP = OC:CD$ et quia
(2) $SP:PT = CD:CA$, erit ex aequali
4) $RS:PT = OC:AC$. E tertia deducitur
5) $PT:GT = AC:CV$. Ergo ex aequali
6) $RS:GT = OC:CV$.

Quum autem sit $CF > CB$ (vid. lemma IV) et $FD < AB$, erit ratio $CD:DF$ major ratione $CA:AB$. Porro $CD:DF = CO^2:OF^2$ et $CA:AB = CV^2:VB^2$; ergo quoque ratio $CO:OF$ major est quam ratio $CV:VB$, unde ex lemmate III deducitur lineam CO esse majorem quam CV, quum autem $RS:GT = OC:CV$ (6), constat, tempus RS majus esse tempore GT. Q.E.D.

Constat etiam, tempus per DC ad tempus per DBC habere ratioem $DC:(DO + CV)$.

Scholium.

„Ex his quae demonstrata sunt colligi posse videtur, descensum omnium velocissimum e termino ad terminum non per bre-

vissimam lineam nempe per rectam, sed per circuli portionem fieri. In quadrante enim *BAEC* fig. 56 cujus latus *BC* sit ad horizontem erectum, divisus sit arcus *AC* in quotcunque partes aequales *AD, DE, EF, FG, GC* et ductae sint *CA, CD, CE, CF, CG* et *AD, DE, EF, FG*.

Manifestum est descensum per *ADC* citius absolvi quam per *AC* vel *DC* ex quiete in *D*; sed per duas *DEC* ex quiete in *A* versimile est citius absolvi descensum, quam per solam *CD*. Ergo descensus per tres *ADEC* absolvitur citius quam per duas *ADC*. Sed descensus per *EFC* citius absolvitur, quam per *FC*, atque tandem per duas *FGC* citius motus absolvitur, quam per *FC*. Ergo per quinque *ADEFGC* breviori tempore mobile descendit quam per quatuor *ADEFC*, vel per solam *AC*. Quo magis inscriptis polygonis ad circumferentiam accedimus, eo citius motus inter terminos *A* et *C* absolvetur."

Sed citissime mobile a termino ad terminum descendit per arcum ejus lineae curvae, quae Cyclois vocatur.

Problema XV. Propos. XXXVII.

Dato perpendiculo *AB* fig. 57 et plano inclinato *AC*, quorum eadem sit elevatio, partem in inclinato reperiri, quae sit aequalis perpendiculo et conficiatur eodem tempore, quo perpendiculum percurritur."

Ponatur $AD = BD$, *CD* bifariam dividatur in puncto *I*, et fiat $AC : CI = CI : AE$, cui aequalis describatur *DG*, ita ut sit $EG = AD = AB$. Dico hanc *EG* esse quaesitam partem plani *AC*. E proportione $AC : CI = CI : AE$ paulatim derivatur $CA : AI = DI : IG = CI : IG$ et $IA : AG = CA : AI$. Est itaque *AI* media inter *CA, AG*, et *CI* media inter *CA, AE*. Ergo si ponimus, tempus per *AB* esse *AB*, erit *AC* tempus per *AC*, et *CI* seu *ID* tempus per *AE*; porro erit *AI* tempus per *AG* et reliqua *IC* tempus per reliquam *GC*. Fuit autem *DI* tempus per *AE*: itaque sunt *DI, IC* tempora per utramque *AE, CG*; ergo *DA* erit tempus per *EG*, aequale tempori per *AB*.

Corollarium.

„Ex his constat, spatium quaesitum esse intermedium inter partes, superiorem et inferiorem, quae aequalibus temporibus conficiantur."

Problema XVI. Propos. XXXVIII.

„Datis duobus planis horizontalibus CD, BE fig. 58 a perpendiculo ACB sectis: in perpendiculo sublime punctum reperiatur, ex quo mobilia descendentia et in planis horizontalibus reflexa conficiant temporibus aequalibus temporibus casuum in iisdem horizontalibus, in superiore nempe atque in inferiore, spatia, quae inter se habeant quamcunque datam rationem $N:FG$ minoris ad majorem."

Ponatur GH aequalis ipsi N et fiat $FH:HG = BC:CL$. Dico L esse punctum quaesitum.

Sumta enim CM aequali duplo lineae CL, ducatur LM, plano BE in puncto O occurrens: erit $BO = 2BL$, et quia $FH:HG = BC:CL$ erit HG seu $N:GF = CL:LB = CM:BO$. Sed CM duplum est lineae LC, spatium igitur CM est illud, quod a mobili descendente ex L post casum LC conficitur in plano CD, atque BO illud quod conficitur post casum LB, tempore aequali tempori casus per LB, quum BO sit duplum lineae BL.

CAPUT. III.

De motu pendulorum seu corporum per arcus circuli descendentium et ascendentium.

Jam restat explicatio theorematum, quae Galileus de motu pendulorum conscripsit. Incidit in ea undeviginti fere annos natus, lucernam a camera aedis cathedralis Pisanae pendentem et vibrantem intuens. Scripta ea videmus in dialogi primi pagina 538 seqq. ubi eorum auxilio nonnulla problemata, quae ad musicam spectant, expediuntur. Quamvis idoneis experimentis adhibitis et sibi et aliis ea esse vera persuasum haberet, tamen ea, quantamcunque operam impendebat secundum leges cadendi inventas, quas e capitibus antecedentibus cognovimus, probare non poterat.

Si phaenomena quaedam conjecturis, ad quas pertinent, explicari non possunt, haud raro quidem fieri solet, ut conjecturae ipsae non sufficiant et a veritate abhorreant; saepissime au-

tem ea maxime phaenomena, quae ad motum spectant, ob hanc causam explicari, i. e. natura eorum conjectura constitui nequit, quod meditationes quibus opus est pro literarum conditione nimis arduae sint. Quod ad primum attinet conclusiones ad phaenomeni naturam pertinentes effici quidem possunt, sed neque comprobantur ea et experimentis repugnant; quod vero ad alterum attinet, licet phaenomenon cum conjectura congruat, tamen ista consensio demonstrari non potest, id quod et Galileo accidit, postquam naturam motuum pendulorum animadvertit; qua de causa theses de his rebus propositas rationibus explicare non potuit. Nihilominus eae demonstrari possunt, sed postulat earum explicatio ut periti simus analyseos sublimioris, Galilei temporibus nondum repertae.

Si igitur in thesibus, quae in praecedente capite traditae et ab auctore ipso jam probatae sunt, tractandis, argumentis his retentis id tantum videndum mihi erat, ut theses plane explicarem earumque nexum penitus demonstrarem, jam ipse quaedam inveniam necesse est, cum theses nunc propositae proprio mihi modo explicandae sint, qua in re id maxime spectandum erit, ut earum argumenta iisdem principiis firmem, quibus et Galileus utitur, quaeque dissertatione exposuit: hac enim sola conditione libellus subsequens in illius hominis acutissimi systema recipi ejusque dissertationi adjungi poterit. Postquam naturam casus per lineas verticales et plana inclinata peragi soliti deteximus, jam videbimus, quid, secundum adhuc explicata, de natura motuum per curvas in universum judicare possimus. Theorema in hunc finem auxiliare hoc est: „impetus, quem corpus in quolibet etsi curvilineo lapsu a quiete decidens acquisivit, aequalis est velocitati, quam acquirit si ex eadem altitudine verticaliter defertur.“ Hoc theorema nihil esse videmus nisi dilatatam illam suppositionem autoris nostri tam gravem, quae jure dilatari poterat: qua de causa sequitur:

Demonstratio.

Sint plana duo horizontalia AF et DH, fig. 59 de quorum superiori linea curva AD, quae si libuerit arcus circuli putari potest, usque ad inferius deorsum inclinet: dico corpus per lineam curvam AD ex A decidens in puncto D eandem habere velocitatem, quam in puncto H acquisivisset, postquam delapsum esset per perpendiculum AH. Fingamus in linea curva AD ab A us-

que ad D quamlibet multitudinem quantarumlibet chordarum ductam, e. g. AB, BC, CD: corpus per has chordas ex A decidens, offensione, qua illud in angulis a chordis descriptis impeditur, sublata, in D impetum acquisiverit, qui aequalis est illi, quem habet casu per AH peracto. Etenim si chordae CB et DC usque ad superius planum horizontale producantur: impetus acquisitus in B casu per AB aequalis erit velocitati post casum EB; porro autem impetus in C post casum per EC aequalis est velocitati post motum per FC, unde sequitur, ut corpus per chordas AB, BC, CD ex quiete in A ad horizontem DH descendens tantam velocitatem acquisiverit, quantam acquisivisset, si per totum planum FD cecidisset, qualis impetus iterum aequalis est velocitati in H post casum liberum in AH acquisitae.

Idem tum etiam sine dubio ratum est, quantulaecunque chordae ab A ad D ductae fingantur, sicuti e.g. AG, GB, BM et reliquae, modo offensionem abesse cogites, quae in angulis revera exsistit: unde conjici potest fore, ut mobile, si per lineam curvam AD ipsam delabatur, jam in D velocitatem significatam habeat, hac quidem differentia, ut offensionem amotam esse putemus non necesse sit, quum lineae curvae ipsi anguli non sint.

Hoc theoremate adjuvante velocitatem constituere poterimus, quam corpus per quamlibet lineam $ACFG$ fig. 60 ab A e quiete decidens in quovis ejus puncto acquisiverit, idque hac ratione.

Per A ducta esse fingatur horizontalis DE, ad aequationem curvae determinandam sumatur linea DE tanquam linea abscisarum, cujus initium sit in A, et hanc ob rem aequatio curvae notetur per $x = f(y)$: velocitas, quam corpus cadens in quolibet puncto C habet, secundum theorema antecedens aequalis erit velocitati, quae libero casu BC vel y acquisita est. Haec autem ex sententia primae propositionis capitis I dissertationis de motu naturaliter accelerato ejusmodi est, ut ejus ope eo tempore, quo spatium y libero casu conficitur, duplex spatium $2y$ percurratur. Quodsi hanc velocitatem spatio significamus, quod certo quodam tempore ejus ope percurritur: illa est $= \frac{2y}{m}$, qua in formula m tempus indicat, quo y cadendo conficitur, idque tempus erit $= \sqrt{\frac{y}{g}}$, si per literam g spatium notamus, quod assumta tempo-

ris unitate libero casu conficitur; quae enim si ita sunt, ex sententia theorematis secundi capitis I, inter quantitates m, y et g haec aequatio locum habet $y:g = m^2:1$, ex qua colligitur $m = \sqrt{\left(\frac{y}{g}\right)}$. Velocitas igitur, quam mobile cadens habet in puncto curvae, cujus coordinatae x, y sunt, erit

$$\frac{2y}{\sqrt{\left(\frac{y}{g}\right)}} = \sqrt{4gy}.$$

Quodsi praeterea litera s notamus quantitatem spatii tempore t confecti, haec aequatio differentialis efficitur $\frac{ds}{dt} = \sqrt{4gy}$, unde derivatur $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{4gy}}$, quae aequatio sufficit ad universam motus naturam perspiciendam; namque cum constet $\frac{ds}{dy} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}}$: invenitur $\frac{dt}{dy} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dy} = \frac{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}}}{\sqrt{4gy}}$, et $t = \int \frac{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}}}{\sqrt{4gy}} dy$, qua aequatione pro quovis curvae puncto tempus indicari potest, quo id a mobili cadendo percurritur, siquidem integratio significata revera perfici potest. Itaque explorabimus, quomodo hae formulae generales in motu pendulorum commutentur.

In fig. 61 EDA arcum esse fingamus, qui non major sit, quam circuli quadrans, cujusque sit centrum C, radius $CA = b$ sit perpendicularis in horizonte AB: primum tempus quaero, quo mobili opus est, ut per quamlibet illius arcus partem cadat. Ut simplicior sit figura, lineas AB et AC sumo axes coordinatos, quorum igitur punctum initiale est A, et quidem sumo abscissam x in horizontali AB, ordinatam y autem in verticali AC: pro arcu AE, ut constat, aequatio est $x^2 = 2by - y^2$, sed hac in formula y non major fieri debet quam b, quia ille arcus non major est quadrante.

Fac igitur e puncto D ex quiete descendat corpus de altitudine qualibet h, sed ne sit ea major quam b: ejus velocitas, quam

in quolibet puncto F, cajus coordinatae sunt x et y, habet, tanta erit quantam acquirit, si ex eadem altitudine perpendiculariter delabitur. Quum haec altitudo aequalis sit differentiae altitudinum punctorum D et F, sive $= (h-y)$: erit, siquidem g ut supra casus altitudinem pedibus expressam significat, quos corpus ex quiete cadens temporis unitate v. g. tempore unius minuti secundi percurrit, secundum ea quae ante jam demonstrata sunt, velocitas in F sive $\frac{ds}{dt} = \sqrt{4g(h-y)}$, quae aequatio ad finem mihi propositum attingendum sufficit. Ut eam solvamus primum eam hac formam induemus $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{4g(h-y)}}$; deinde exprimemus ds per ordinatam y ejusque differentiale.

Quum arcus AD in A vergens augescens ponatur: constat nos habere $\frac{ds}{dy} = -\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}}$; sed ex aequatione $x^2 = 2by - y^2$ deducitur $\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{b-y}{\sqrt{(2by-y^2)}}$, itaque $\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\} = 1 + \frac{(b-y)^2}{2by-y^2} = \frac{2by-y^2+b^2-2by+y^2}{2by-y^2} = \frac{b^2}{2by-y^2}$; erit itaque $\frac{ds}{dy} = -\frac{b}{\sqrt{(2by-y^2)}}$ et $\frac{dt}{dy} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dy} = -\frac{b}{\sqrt{4g(h-y)(2by-y^2)}}$, sive $\frac{dt}{dy} = -\sqrt{\frac{b}{8g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y(h-y)\left(1-\frac{y}{2b}\right)}}$, cujus functionis integrale, quemadmodum infra videbimus, serie facile exprimi poterit; ante vero significationem simplicissimam et ad verum integralis valorem quam proxime accedentem cognoscemus.

Si altitudinem h non nimiam ponimus: y, cujus valor nunquam major fieri potest quam h, siquidem y comparaveris cum b, minimus, itaque valor fractionis $\frac{y}{2b}$ paene negligendus erit, qua de causa valor differentialis dt haud valde immutabitur, si factorem

$\sqrt{\left(1-\frac{y}{2b}\right)}$, qui ad unitatem etiam propius accedit quam $\left(1-\frac{y}{2b}\right)$, in praesens omittimus ideoque ponimus

$$\frac{dt}{dy}=-\sqrt{\frac{b}{8g}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y(h-y)}}.$$

Hanc aequationem ante solvemus et eventa inde deducta explorabimus, quam integrationem differentialis accurati suscipimus ideoque erroris levitatem, in quem hac in sumptione labimur, cognoscimus.

Si aequationi differentiali $\frac{dt}{dy}=-\sqrt{\frac{b}{8g}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y(h-y)}}$ induerimus formam idem significantem hanc $\frac{dt}{dy}=-\sqrt{\frac{b}{8g}}$ $\cdot\, y^{-1}\cdot(-1+hy^{-1})^{-\frac{1}{2}}$, videbimus eam ad aequationes differentiales, quas vocant binomicas, pertinere, atque propter singularem ejus formam facile integrari posse; namque si $(-1+hy^{-1})$ aequalem reddimus $=z^2$, unde $(-1+hy^{-1})^{-\frac{1}{2}}$ $=\frac{1}{z}$, deinde $y^{-1}=\frac{1+z^2}{h}$, $y=\frac{h}{(1+z^2)}$ et $\frac{dy}{dz}=-$ $\frac{2hz}{(1+z^2)^2}$ derivatur, habebimus $\frac{dt}{dy}=-\sqrt{\frac{b}{8g}}\cdot\frac{1+z^2}{h}$ $\cdot\frac{1}{z}$, et $\frac{dt}{dz}=\frac{dt}{dy}\cdot\frac{dy}{dz}=-\sqrt{\frac{b}{8g}}\cdot\frac{(1+z^2)}{h}\cdot\frac{1}{z}$ $\cdot\frac{(-2hz)}{(1+z^2)^2}$ sive $\frac{dt}{dz}=+\sqrt{\frac{b}{2g}}\cdot\frac{1}{(1+z^2)}$ ideoque

$$t=\int\sqrt{\frac{b}{2g}}\cdot\frac{1}{(1+z^2)}dz=\sqrt{\frac{b}{2g}}\cdot\text{arc (tang.}=z)+\text{const.}$$

Si pro z valorem ejus $\sqrt{\left(\frac{h}{y}-1\right)}$ substituimus, erit $t=$ $\sqrt{\frac{b}{2g}}\cdot\text{arc (tang.}=\sqrt{\left(\frac{h}{y}-1\right)}+\text{const.}$

Haec formula nobis indicat tempus, quo quaelibet pars arcus *DA*, e. g. *GH* cadendo conficitur, modo finium, y' et y'', inter quos integrale sumatur necesse est, justam rationem habea-

mus. Nostro consilio, demonstrandi scilicet theoremata a Galileo proposita, sufficit, tempus cadendi per totum arcum DA invenisse. Quodsi igitur pro motus initio in D, ubi y est $=h$, $t=o$ ponimus, ante omnia ad constituendam constantem hanc aequationem deprehendimus $o=\sqrt{\frac{b}{2g}}\,.\,\mathrm{arc.}(\mathrm{tang.}=o)+\mathrm{Const.}$, unde conjicitur ejus valorem esse o, nosque tantum habere $t=\sqrt{\frac{b}{2g}}\,.\,\mathrm{arc.}\left(\mathrm{tang.}=\sqrt{\left(\frac{h}{y}-1\right)}\right)$. Si igitur litera T tempus notamus, quo mobile totum arcum DA cadendo percurrit, ita ut pro fine motus $y=o$ inveniamus: in aequatione nostra ponendum erit $y=o$, unde efficitur $t=\sqrt{\frac{b}{2g}}\,.\,\mathrm{arc.}(\mathrm{tang.}=\infty)$, vel si π significat numerum Ludolphi de Ceuln

$$t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{b}{2g}}=T,$$

quae formula penduli temporis vibrationis dimidiam partem fere accurate indicabit, cujus radius est b; etenim jam ante monstratum est, mobile in A casu per arcum DA peracto tantum impetum acquisivisse, quantus id mobile per similem arcum ad eandem altitudinem reducere possit, nec non deminutionem velocitatis graduum gravis ascendentis ordine inverso effici, quo auctum horum graduum in descensu: qua de causa totum vibrationis tempus aequale erit $=\pi\sqrt{\frac{b}{2g}}$.

Ex quo intelligitur fore, ut idem pendulum eodem tempore majores arcus cadendo conficiatur, quam minora, quum hoc tempus non pendet nisi e longitudine penduli b et e casus altitudine g, quae constans est. Galileus hoc theorema his verbis exprimit:

„L' istesso pendolo fa tutte le sue vibrazioni massime, mediocri e minime sotto tempi precisamente eguali.“

Experimentum, quo, ut veritatem hujus theorematis sibi persuaderet, utebatur, in epistola ad Marchese Guido Ubaldo dal Monte scripta Patavii die XXIX Novbr. anni MDCII exponit, quae epistola, in ejus opera recepta, secundi voluminis pag. 716 — 719 continetur. Cujus epistolae pars ad dissertationem nostram pertinens haec est:

„Piglio due fili sottili lunghi ugualmente due o tre braccia l'uno e sieno *AB*, *EF* fig. 62, e gli appicco a due chiodetti *A*, *E* e nell' altre estremità *B*, *F* lego due palle di piombo uguali (sebben niente importa, se fussero disuguali), rimuovendo poi ciascuno de i detti fili dal suo perpendicolo, ma uno assai, come saria per l'arco *CB*, e l'altro pochissimo, come saria secondo l'arco *IF*, gli lascio poi nell' istesso momento di tempo andare liberamente, e l'uno comincia a descrivere archi grandi simili al *BCD*, l'altro ne descrive de' piccoli simili al *FIG*, ma non pero consuma più tempo il mobile *BA* passare tutto l'arco *BCD*, che si faccia l'altro mobile *F* a passare l'arco *FIG*, di che rendo sicurissimo così."

„Il mobile *B* passa per lo grand' arco *BCD* e ritorna per lo medesimo *DCB* e poi ritorna verso *D*, e va per 500 e 1000 volte reiterando le sue reciprocazioni, l'altro parimente va da *F* in *G*, e di più torna in *F*, e parimente farà molte reciprocazioni, o nel tempo, ch'io numero v. gr. le prime cento grandi reciprocazioni *BCD*, *DCB* ec. un altro osservatore numera cento altre reciprocazioni per *FIG* piccolissime, e non ne numera pure una sola di più, segno evidentissimo, che ciascheduna particolare di esse grandissime *BCD* consuma tanto tempo, quanto ogni una delle minime particolari *FIG*, or se tutta la *BCD* vien passata in tanto tempo, in quanto la *FIG*, ancora le loro metà, che sono le cadute per gli archi disuguali della medesima quarta saranno fatte in tempi uguali. Ma anco senza stare a numerar altro V. S. Illustris. vedrà, che il mobile *F* non farà le sue piccolissime reciprocazioni più frequenti, che il mobile *B* le sue grandissime, ma sempre anderando insieme."

Formula inventa nos etiam docet tempus cadendi per arcum esse brevius, quam tempus cadendi per chordam vel per diametrum, id quod Galileus ipse dissertatione demonstravit.

Sed rationem quoque horum temporum duorum jam investigare poterimus.

Si T significat tempus, unitatibus mensurae expressum, quo diameter circuli cujus radius est b, ex quiete casu verticali conficitur, porro si g idem quam ante significat: erit $2b : g = T^2 : 1$ ergo $T = \sqrt{\frac{2b}{g}}$; itaque quum tempus, quo circuli hujus arcus,

qui et ipsi in imo circumferentiae puncto finiri debent, casu conficiuntur $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{b}{2g}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2b}{g}}$, sicuti jam reperimus, erit $T > t$, et quidem haec ratio erit $T:t = 1:\frac{\pi}{4}$ sive $T:t = 4:\pi = 4:3{,}14159\ldots.$

Praeterea alterius quoque de penduli motu theorematis primarii veritas patescit, quod Galileus pag. 538 nobiscum communicat; contendit enim illud theorema: „quadrata vibrationis temporum duorum pendulorum eandem rationem habere, quam pendulorum longitudines.“ Eo autem loco dictum videmus:

„Tempi delle vibrazioni di mobili pendenti da fila di differente lunghezza sono in proporzione suddupla delle lunghezze delle fila, o vogliamo dire, le lunghezze essere in duplicata proporzione de i tempi, cioè, son come i quadrati de i tempi.“

Namque si, quod ad ipsa attinet, B, b pendulorum longitudines et T, t tempora vibrationum constantia significant: erit $T = \pi\sqrt{\frac{B}{2g}}$ et $t = \pi\sqrt{\frac{b}{2g}}$, ergo $T:t = \sqrt{B}:\sqrt{b}$, seu $B:b = T^2:t^2$.

Quatenus igitur manifestum est temporibus vibrationum inversam esse rationem, quam numero vibrationum, quae eodem tempore conficiantur, licet nobis etiam contendere, „longitudines pendulorum duorum inversam rationem habere, quam come i quadrati de' numeri delle vibrazioni, che si fanno nel medesimo tempo,“ unde, Galileo monstrante, solutio hujus postulationis sequitur:

Problema.

„Constituatur longitudo fili de qualibet altitudine libere dependentis, idque etsi punctum supensionis conspici non possit, sed ejus tantum finis infimus conspici possit.“

Solutio.

In inferiore ejus parte suspendas pondus, cures ut vibret, utque ab alio quodam vibrationes ejus numerentur, dum ipse vibrationes penduli unum pedem accurate longi numeres. E ratione numeri vibrationum, quae eodem tempore conficiuntur; fili lon-

gitudo facile colligi poterit. Si e. g. invenias filum tres tantum vibrationes fecisse, dum pendulum decem fecerit, fili longitudo ad penduli longitudinem, quae est unius pedis, eandem rationem habebit, quam $10^2 : 3^2 = 100 : 9$; ergo longitudo ignota erit $= \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$ pedes.

Formula $t = \pi\sqrt{\frac{b}{2g}}$, in qua t totum vibrationis tempus significat, siplicem, ut Hugenius primus monstravit, et certissimam viam nobis offert, magnitudinem g observationibus constituendi, quia ex ea deducitur $g = \frac{b \cdot \pi^2}{2t^2}$. E. g. si in pendulo omnino non longiori uno pede tempore $1^h\,35^m\,25^s$ vibrationes 10000 numerasses: longitudo unius temporis vibrationis inveniretur $= \frac{1^h\,35^m\,25^s}{10000} = 0{,}5725''$; in aequatione superiori igitur esset $b = 1$, $t = 0{,}5725$ et $\pi^2 = 9{,}8693\ldots$, $t^2 = 0{,}32775$, $2t^2 = 0{,}6555$, ergo $g = \frac{9{,}8693}{0{,}6555} = 15{,}056$.

Inquiramus nunc in errorem, quem, factore $\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{y}{2b}\right)}}$ neglecto, commisimus, et in mutationem, quae ab eo effecta ad inventa jam acquisita pertinet. Hunc in finem nunc suscipiamus

„integrationem accuratam

differentialis $dt = -\sqrt{\frac{b}{8g}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{y(h-y)\left(1-\frac{y}{2b}\right)}}$."

Ante omnia si factorem $\left(1-\frac{y}{2b}\right)^{-1/2}$ secundum axioma binomicum pro dignitatibus augescentibus ordinatae y explicamus, habebimus $\left(1-\frac{y}{2b}\right)^{-1/2} = 1 + 1/2\left(\frac{y}{2b}\right) + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^2}\left(\frac{y}{2b}\right)^2$ $+ \ldots + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3)}{1 \cdot 2 \ldots (n-1) \cdot 2^{n-1}} \left(\frac{y}{2b}\right)^{n-1} + \ldots = 1 +$

$$+\frac{y}{4b}+\frac{1.3}{1.2}.\left(\frac{y}{4b}\right)^2+\frac{1.3.5}{1.2.3}.\left(\frac{y}{4b}\right)^3+\ldots\ldots$$

$$+\frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)}{1.2.3.4\ldots(n-1)}.\left(\frac{y}{4b}\right)^{n-1}+\ldots$$ itaque $dt=$

$$=-\sqrt{\frac{b}{8g}}.y^{-1}dy(-1+hy^{-1})^{-\frac{1}{2}}.\left\{1+\left(\frac{y}{4b}\right)+\right.$$

$$+\frac{1.3}{1.2}.\left(\frac{y}{4b}\right)^2+\frac{1.3.5}{1.2.3}\left(\frac{y}{4b}\right)^3+\ldots\ldots$$

$$\left.+\frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)}{1.2.3.4\ldots(n-1)}.\left(\frac{y}{4b}\right)^{n-1}+\ldots\right\};$$ ergo habebimus $t=\int-\sqrt{\frac{b}{8g}}.y^{-1}dy(-1+hy^{-1})^{-\frac{1}{2}}+$

$$+\int-\sqrt{\frac{b}{8g}}.\left(\frac{y}{4b}\right).y^{-1}dy(-1+hy^{-1})^{-\frac{1}{2}}+\ldots$$

$$\int-\sqrt{\frac{b}{8g}}.\frac{1.3}{1.2}.\left(\frac{y}{4b}\right)^2.y^{-1}dy(-1+hy^{-1})^{-\frac{1}{2}}+\ldots$$

$$\int-\sqrt{\frac{b}{8g}}.\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots(n-1)}.\left(\frac{y}{4b}\right)^{n-1}$$

$$.y^{-1}dy(-1+hy^{-1})^{-\frac{1}{2}}+\ldots$$

Praeterea haec series, factore $\left(-\sqrt{\frac{b}{8g}}\right)$ omnibus terminis communi ante uncinum posito, conjunctisque dignitatibus ordinatae y, hanc in formam mutabitur:

$$t=-\sqrt{\frac{b}{8g}}\left\{\int y^{-1}dy(-1+hy^{-1})^{-\frac{1}{2}}+\int\frac{1}{4b}dy(-1+hy^{-1})^{-\frac{1}{2}}\right.$$

$$+\int\frac{1.3}{1.2}.\left(\frac{1}{4b}\right)^2ydy(-1+hy^{-1})^{-\frac{1}{2}}+$$

$$+\int\frac{1.3.5}{1.2.3}.\left(\frac{1}{4b}\right)^3y^2dy(-1+hy^{-1})^{-\frac{1}{2}}+\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.+\int\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots(n-1)}\left(\frac{1}{4b}\right)^{n-1}y^{n-2}dy(-1+hy^{-1})^{-\frac{1}{2}}+\right\}$$

Si, quemadmodum ante factum est, nunc ponimus $(-1+hy^{-1})=z^2$, quo efficitur $y=\frac{h}{1+z^2}$: haec series

demto omnibus terminis communi factore (—2) in hanc se vertet:

$$t = +\sqrt{\frac{b}{2g}}\left\{\int\frac{dz}{1+z^2}+\frac{h}{4b}\int\frac{dz}{(1+z^2)^2}+\right.$$

$$+\frac{1.3}{1.2}\cdot\left(\frac{h}{4b}\right)^2\int\frac{dz}{(1+z^2)^3}+\frac{1.3.5}{1.2.3}\left(\frac{h}{4b}\right)^3\int\frac{dz}{(1+z^2)^4}$$

$$\left.+\ldots+\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}\left(\frac{h}{4b}\right)^{n-1}\int\frac{dz}{(1+z^2)^n}+\right\},$$

in qua formula hoc monendum est, quod quum integralia ad y pertinentia inter fines $y=h$ usque ad $y=o$ sumenda sint, hisque valoribus y respondeant $z=o$, $z=\infty$, integralia postrema ad z pertinentia inter fines $z=o$ et $z=\infty$ sumantur necesse est, siquidem t, ut supra, dimidium vibrationis tempus penduli significat.

Valorem primi termini $\int\frac{dz}{1+z^2}$ jam supra deprehendimus aequalem $\frac{\pi}{2}$, siquidem finium ratio habebatur; quod autem attinet ad reliquos terminos, jam aggrediemur ad integrationem eorum in termino communi seu generali, qualis formula termini, cujus index est n, cogitari potest. Haec integratio ex eo constat, ut exponens n formulae $(1+z^2)^n$, quae indice termini generali

$$\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(2n-3)}{1.2.3.4\ldots\ldots(n-1)}\left(\frac{h}{4b}\right)^{n-1}\int\frac{dz}{(1+z^2)^n}$$

continetur, singulis unitatibus paullatim deminuatur, et integrale $\int\frac{dz}{(1+z^2)^n}$ postremo ad integrale $\int\frac{dz}{1+z^2}$ reducatur, quod jam invenimus; hoc efficitur sesundum formulam notam hanc:

$$„\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{-p} =$$

$$\frac{x^m(a+bx^n)^{-p+1}-(m+n-np)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{-p+1}}{(p-1)na},“$$

secundum quam $\int dz\,(1+z^2)^{-n}$ primo mutatur in

$$\frac{3-2n}{2(1-n)}\int dz(1+z^2)^{-n+1}-\frac{z(1+z^2)^{-n+1}}{2(1-n)};\ \text{quodsi}$$

$\int dz(1+z^2)^{-n+1}$ eodem modo explicamus, rationemque continuamus, donec ad integrale $\int dz(1+z^2)^{-n+(n-1)}$ pervenerimus, habebimus: $\int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = -\frac{1}{2(1-n)} z(1+z^2)^{-n+1}$ $+ \alpha z(1+z^2)^{-n+2} + \beta z(1+z^2)^{-n+3} + \ldots + \lambda z(1+z^2)^{-1}$ $+ A\int dz(1+z^2)^{-1}$, ubi $\alpha, \beta \ldots \lambda, A$ erunt quantitates constantes e ratione deductae.

Notandum est, eos terminos, ante quos signum $\int$ non amplius positum videmus, si inter fines, quos par est $z=o$ et $z=\infty$ sumantur, omnino evanescere; quum enim iis forma sit $\gamma z(1+z^2)^{-r}$: iidem et ad $z=o$ et ad $z=\infty$ nihil valent, ideoque integrale $\int dz(1+z^2)^{-n}$ ad hunc unicum terminum $A\int dz(1+z^2)^{-1}$ reductum est, cujus coëfficiens A adhuc investigandus est.

Hoc in opere utimur formula

$\int dz(1+z^2)^{-n} = \frac{3-2n}{2(1-n)}\int dz(1+z^2)^{-n+1} -$ $\frac{z(1+z^2)^{-n+1}}{2(1-n)}$, quae, quum terminus ultimus evanescat, in hanc abit:

$$\int_{z=0}^{z=\infty} dz(1+z^2)^{-n} = \frac{3-2n}{2(1-n)} \cdot \int_{z=0}^{z=\infty} dz(1+z^2)^{-n+1};$$

ex hac colligitur pro $n=2$:

$$\int_{z=0}^{z=\infty} dz(1+z^2)^{-2} = \frac{1}{2}\int_{z=0}^{z=\infty} dz(1+z^2)^{-1};$$ pro $n=3$:

$$\int_{z=0}^{z=\infty} dz(1+z^2)^{-3} = \frac{3}{4}\int_{z=0}^{z=\infty} dz(1+z^2)^{-2} =$$

$$= \frac{1.3}{2.4}\int_{z=0}^{z=\infty} dz(1+z^2)^{-1};$$ pro $n=4$:

$$\int_{z=0}^{z=\infty} dz(1+z^2)^{-4} = \frac{5}{6}\int_{z=0}^{z=\infty} dz(1+z^2)^{-3} =$$

$$= \frac{1.3.5}{2.4.6}\int_{z=0}^{z=\infty} dz(1+z^2)^{-1};$$ unde facilibus combinationibus in universum concluditur:

$$\int_{z=0}^{z=\infty} dz(1+z^2)^{-n} = \frac{1.3\ldots(2n-3)}{1.2\ldots(n-1)} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}\int_{z=0}^{z=\infty} dz(1+z^2)^{-1},$$

et quum sit $\int_{z=0}^{z=\infty} dz(1+z^2)^{-1} = \frac{1}{2}\pi$, integratio termini generalis finita est; nam erit:

$$\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(2n-3)}{1.2.3.4\ldots\ldots(n-1)} \cdot \left(\frac{h}{4b}\right)^{n-1} \int \frac{dz}{(1+z^2)^n} =$$

$$= \left\{\frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)}{1.2.3.4\ldots(n-1)}\right\}^2 \cdot \left(\frac{h}{4b}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{\pi}{2} =$$

$$= \left\{\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(2n-3)}{1.2.3.4\ldots\ldots(n-1)}\right\}^2 \cdot \left(\frac{h}{8b}\right)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{2};$$

si igitur sensim ponimus $n=2, 3, 4\ldots$ et quae sunt reliqua ejusmodi, ut valorem secundi, tertii, quarti .... termini inveniamus, posito factore $\frac{\pi}{2}$ omnibus terminis communi ante uncinum: pro dimidio vibrationis tempore invenimus hanc formulam:

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{b}{2g}} \cdot \left\{1 + \left(\frac{h}{8b}\right) + \left(\frac{1.3}{1.2}\right)^2 \left(\frac{h}{8b}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{1.2.3}\right)^2 \left(\frac{h}{8b}\right)^3 + \ldots + \left\{\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots(n-1)}\right\}^2 \left(\frac{h}{8b}\right)^{n-1} + \ldots\right\}$$

Constat haec formula duobus e factoribus, quorum alter $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{b}{2g}}$ congruit cum formula jam supra pro dimidio vibrationis tempore inventa, alter vero series est convergens, quae parum ab unitate differt, siquidem $\frac{h}{8b}$ est fractio parva. Valor maximus hujus seriei certo pro $h = b$ est, quia h major quam b fieri non potest, et quo minor h est, eo magis deminuitur seriei valor. Ut vero sit $h = b$, ubi angulus oscillationis aequalis est 1 R: illius seriei valor utique aliquanto differet ab unitate, i. e. erit aequalis 1, 180340...; si vero angulus oscillationis quinque forte gradibus non major esse putatur, haec differentia sentiri non potest, namque quum, quemadmodum e fig. 61 intelligi potest, $\frac{h}{b}$ sit sinus versus anguli oscillationis, erit $\frac{h}{b} = 0{,}0038053$ itaque $\frac{h}{8b} = 0{,}0004756$, quare seriei valor, qui est $= 1{,}0004761$, unitati aequalis considerari potest.

Itaque quin constituta supra et jam demonstrata theoremata Galilei nempe:

1) „quodvis pendulum habere tempus vibrationis constans [cf. notam in fine hujus operis positam], quamvis oscillationis anguli differant,“ et

2) „longitudines duorum pendulorum duplam habere rationem ejus, quam habeant eorum oscillationis tempora“

fere omnino vera esse hac inquisitione demonstratum sit, paullum tantum abest, dumne oscillationis anguli nimio magni sumantur, immo etiam theorema alterum omni veritate praditum est, siquidem addimus: „si aequales sint anguli oscillationum,“ qua in re quantitatis eorum absolutae ratio nulla habetur. Hoc facillime intelligi potest, quia hac conditione pro utroque pendulo valor seriei

$$\left\{1+\frac{h}{8b}+\left(\frac{1.3}{1.2}\right)^2\cdot\left(\frac{h}{8b}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{1.2.3}\right)^2\cdot\left(\frac{h}{8b}\right)^3+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\left(\frac{h}{8b}\right)^{n-1}+\ldots\right\},$$

quamvis non sit $=1$, tamen idem est: id quod eo efficitur, quod $\frac{h}{8b}$ est $=\frac{1}{8}$ sin. vers. anguli oscillationis, qui hoc loco aequalis sumtus est. Quodsi T et t, ut antea, tota oscillationis tempora iterum significant: accuratissime habebimus

$$T:t=\pi\sqrt{\frac{B}{2g}}:\pi\sqrt{\frac{b}{2g}},\text{ seu } B:b=T^2:t^2.$$

Haud difficilius esset monstratu, quos singulares valores series illa sub conditionibus certis acquireret, vel, e. g. si formula temporis t accurate algebraica fieret; vel quantum esset tempus oscillationis, si angulus oscillationis fieret $=2R$, et quae sunt reliqua; tamen ea non huc pertinent.

Finem igitur imponam huic capiti afferens argumentum geometricum theorematis postremo propositi, quod e nonnullis theorematis deduci potest, quae Galileus ipse in dissertatione demonstravit.

Theorema.

Longitudines duorum pendulorum duplam habent rationem ejus quam habent tempora oscillationis eorum, quum anguli oscillationum aequales sint.

Sit in fig. 63 HK linea horizontis, ad quam sint erecti in punctis A,a duo circuli inaequales ABN, abn, quorum centra sint M,m, sitque arcus AB majoris circuli similis arcui ab minoris: dico, rationem temporis casus per arcum BA ex quiete in B ad tempus casus per similem arcum ba ex quiete in b subduplam esse ejus, quam habeant ipsorum circulorum diametri seu radii.

Dividamus arcum AB in quotcunque partes aequales BD, DF, FG et quae sunt reliquae, arcumque ab in totidem partes aequales, e. g. bd, df, fg, et conjungamus puncta divisionis proxime jacentia chordis, e. g. BD, bd;

1) binae quaelibet chordae homologae, sicuti FG, fg aequalem ad horizontem inclinationem habebunt, quia, quemad-

modum facile demonstrari potest omnes lineae homologae, in figura literis similibus notatae, parallelae sunt;

2) distantiae binorum quorumlibet punctorum divisionis, e.g. F, f, a lineis respective per B, b, horizonti parallele ductis EP et ep, eandem rationem habebunt, quam radii circulorum, seu $EF : ef = AM : am$. Namque manifestum est omnino omnes productiones lineares partium in utroque circulo homologarum conservare debere rationem radiorum, qua de causa in demonstrandis his prioribus thesibus morari, non necesse esse existimo.

Quodsi curas ut per chordas BD, DF, FG, GA et bd, df, fg, ga ex quiete in B et b mobile descendat, erit

3) tempus casus per primam chordam BD ad tempus casus per chordam bd alterius circuli in ratione subdupla longitudinum earum seu, quod idem est, radiorum, quia secundum priorem thesim hae chordae aequalem ad horizontem habent inclinationem, tum etiam ex sententia secundi theorematis capitis „de motu natur. accel." spatia motu aequabiliter accelerato confecta eandem rationem habent, quam quadrata temporum quibus conficiuntur.

4) Omnino denique mobile casu ex quiete in B et b duas quaslibet chordas homologas, sicuti FG, fg, temporibus conficiet, quae eandem rationem habent quam radices e radiis circulorum. Ut vero hoc demonstres, producas chordas GF, gf usque ad horizontales EP, ep in L et l: manifestum est, mobile in puncto F, casu per BD, DF peracto tantum impetum acquisivisse, quantum acquisivisset, si per lineam rectam LF ex quiete in L cedisset, quia B et L in eadem horizontali sita sunt: quare tempus casus per FG post casum per BDF aequale est tempori casus per eandem lineam post casum per LF. Idem et ad minorem circulum valet. Erit igitur

$$\text{temp. per } LF : \text{temp. per } lf = \sqrt{R} : \sqrt{r} \text{ et}$$
$$\text{temp. per } LG : \text{temp. per } lg = \sqrt{R} : \sqrt{r}; \text{ ergo}$$

temp. per LG : temp. per LF = temp. per lg : temp. per lf, unde derivatur: (temp. per LG — temp. per LF) : temp. p. lg — temp. p. lf)

$$= \text{temp. per } LG : \text{temp. per } lg = \sqrt{R} : \sqrt{r}.$$

Itaque erunt tempora descensuum per chordas Fg et fg, dum mobile gravitate incitatum movetur per chordas $BDFG$, $bdfg$ ex quiete in B et b, in ratione subdupla radiorum R, r: est enim (temp. per LG — temp. per LF) = temp. per FG post casum de L, atque (temp. per lg — temp. per lf) = temp. per fg.

5) Quum autem invenerimus

temp. per BD : temp. per $bd = \sqrt{R} : \sqrt{r}$, et
temp. per DF : temp. per $df = \sqrt{R} : \sqrt{r}$; porro
temp. per FG : temp. per $fg = \sqrt{R} : \sqrt{r}$, denique
temp. per GA : temp. per $ga = \sqrt{R} : \sqrt{r}$: erit

$$\{\text{temp. per } BD + \text{temp. per } DF + \text{temp. per } FG + \text{temp. per } GA\}$$
$$: \{\text{temp. per } bd + \text{temp. per } df + \text{temp. per } fg + \text{temp. per } ga\}$$
$$= \sqrt{R} : \sqrt{r}.$$

Quare chordae $BDFGA$ et $bdfga$ cadendo conficiuntur temporibus, quae rationem eandem habent, quam radices e radiis circulorum, dummodo, ut jam saepe monui, offensionem negligas, qua mobile in angulorum verticibus re vera retardatur.

Idem semper valebit, in quotcunque partes arcus AB et ab diviseris, et quum arcus ipsos ex infinite parvis chordis continuis compositos fingere tibi liceat: concludere potes, si duo mobilia per arcus similes BA et ba ipsos cadant, tempora casus eandem habitura esse rationem, quam radices e radiis circulorum. —

Nota. Quum, ut supra jam annotatum est, non omnino verum sit, corpus per arcum circuli descendens semper idem tempus consumere, donec ad imum circuli punctum pervenerit, quantuscunque sit arcus ille, per quem descensus e quiete sit factus quaestio nobis occurrit, num omnino talis linea curva exstet, quae, pro via mobilis habita, proprietate illa praedita sit. Notum est et facile demonstratu, cycloiden ejusmodi esse, siquidem ea in eo, quo par est, situ ad horizontem versus posita sit. Sed non ita fortasse persuasum tibi habes, ope analyseos altioris problema illud „curvam, quae significata proprietate gaudeat, inveniri“ directe solvi posse, etiamsi nondum novisses, hanc curvam esse cycloiden. Sub hac conditione hanc quaestionem nondum solutam reperii, et in insequentibus quaestiones, quas hac de re institui, referam.

In fig. 64 linea *CAB* eam curvam significet, in qua mobile, a quocunque ejus puncto e. g. a puncto *D* ex quiete descendens, semper idem tempus t (quod minutis secundis expressum putamus) consumat, donec imum curvae punctum *A* assecutum sit. Quod punctum *A* pro initio habeo linearum coordinatarum, ita ut abscissae, e. g. $AF = x$, directionem lineae horizontalis habeant, quae est *AR;* ordinatae, e. g. *FE,* litera y significentur. In id nobis inquirendum est, num curva, quatenus ea postulata indole praedita sit, re vera exstet: ideoque, quum absoluta curvae cujuscunque in plano quodam sitae natura aequatione inter coordinatas x et y determinetur, necesse erit curemus, ut formam functionis f inveniamus, si curvae nostrae aequationem hanc esse putamus $x = f(y)$.

Secundum ea, quae jam initio hujus capitis tractavi, tempus, quo mobile a puncto *D* ex quiete descendens, cujus altitudinem supra horizontem litera b notemus, per arcum *DEA* descendit, erit:

$$t = \int_{y=b}^{y=0} \frac{-\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}}}{\sqrt{4g(b-y)}}\, dy,$$

$$\text{sive } t = \int_{y=0}^{y=b} \frac{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}}}{\sqrt{4g(b-y)}}\, dy.$$

Quae aequatio facultatem nobis praebet, functionem f determinandi.

Quantitate $\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}}$, quae sicuti functio f nondum quidem determinata, sed certe pro functione quadam τοῦ y habenda est, siquidem functio f revera exstet, litera P notata, aequatio proposita in hanc abit:

$$t = \frac{1}{\sqrt{4g}}\left\{\int^{y=b} \frac{P}{\sqrt{y}}\left(\frac{b}{y} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} dy - \int^{y=0} \frac{P}{\sqrt{y}}\left(\frac{b}{y} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} dy\right\}.$$

Primum in functionem P accurate definiendam inquiremus.

Omnes functiones, ideoque $\frac{P}{\sqrt{g}}$, pro dignitatibus variabilis eorum in seriem explicari aut certe explicatae putari possunt, etiamsi numeros, quos dignitatum exponentes nominamus, in universum pro affirmativis et integris habere non liceat. Sit autem

$$my^{n} + m_1 y^{n_1} + m_2 y^{n_2} + m_3 y^{n_3} + \dots\dots$$

evolutio functionis $\frac{P}{\sqrt{y}}$, cujus termini secundum magnitudinem exponentis dignitatum in ordinem sint redacti, ita ut is terminus, cujus numerus exponens negativus est omnium maximus, primum locum obtineat. Cujus seriei termino generali literis My^{N} notato, numeri M et N omnino aut integri aut fracti, aut affirmativi aut negativi esse possunt. Deinde functione $\left(\frac{b}{y} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}$ secundum theorema binomicum evoluta, invenitur

$$\left(\frac{b}{y} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{b}{y}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{y}\right)^{-\frac{3}{2}} +$$

$$+ \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{1}{1.2}\left(\frac{b}{y}\right)^{-\frac{5}{2}} + \frac{1.3.5}{2.2.2} \cdot \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{b}{y}\right)^{-\frac{7}{2}} +$$

$$\dots\dots + \frac{1.3\dots\dots(2r-3)}{2^{r-1}.\,1.2.3\dots(r-1)} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{-(r-\frac{1}{2})} + \dots\dots\dots \text{ sive}$$

$$\left(\frac{b}{y} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{1}{1.2}\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{5}{2}} +$$

$$\frac{1.3.5}{2.2.2} \cdot \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{7}{2}} + \dots + \frac{1.3\dots\dots(2r-3)}{2^{r-1}.\,1.2.3\dots(r-1)} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{r-\frac{1}{2}} +$$

$\dots\dots +$ Sed ut jam evolutionem integralis

$$\int \frac{P}{\sqrt{y}} \left(\frac{b}{y} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} dy$$

assequamur, necesse est multiplicemus ultimam seriem evolutione $\frac{P}{\sqrt{y}}$, deinde productum earum integremus. Si tantum termino generali evolutionis functionis $\frac{P}{\sqrt{y}}$ multiplicamus, pro generali

evolutionis integralis $\int \frac{P}{\sqrt{y}} \left(\frac{b}{y} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} dy$ termino hanc formulam adipiscimur:

$$\int \left\{ M \frac{y^{N+\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} M \frac{y^{N+\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{M}{1.2} \cdot \frac{y^{N+\frac{5}{2}}}{b^{\frac{5}{2}}} + \right.$$
$$\left. \ldots\ldots + \frac{1.3\ldots\ldots(2r-3)}{2^{r-1}.\ 1.2\ldots(r-1)} M \frac{y^{N+r-\frac{1}{2}}}{b^{r-\frac{1}{2}}} + \ldots\ldots \right\} dy,$$

quae, si ponimus nullius termini numerum exponentem τοῦ y esse $= -1$, id quod infra demonstrabimus, integrata dat:

$$\left\{ \frac{M}{N+\frac{3}{2}} \cdot \frac{y^{N+\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{M}{N+\frac{5}{2}} \cdot \frac{y^{N+\frac{5}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}} + \right.$$
$$\frac{1.3.M}{2.2.1.2} \cdot \frac{y^{N+\frac{7}{2}}}{(N+\frac{7}{2})b^{\frac{5}{2}}} + \frac{1.3.5.M}{2.2.2.1.2.3} \cdot \frac{y^{N+\frac{9}{2}}}{(N+\frac{9}{2}).b^{\frac{7}{2}}} +$$
$$\left. \ldots + \frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-3)\,M}{2^{r-1}.\ 1.2.3(r-1)(N+r+\frac{1}{2})} \cdot \frac{y^{(N+r+\frac{1}{2})}}{b^{r-\frac{1}{2}}} + \ldots \right\} + \text{Const.}$$

Quum autem haec series nec pro $y = b$ nec pro $y = o$ valore infinite magno imbui possit, quod hac conditione dimidiae vibrationis tenor, qui et datus est et finitus, valorem infinite magnum acquireret: oportet numerum N non majorem negativum valorem habere quam $-\frac{3}{2}$, ne fiant termini quidam illius seriei pro $y = o$ infinite magni. Quin etiam numerus N ne ipsi quidem quantitati $-\frac{3}{2}$ aequalis esse potest, quia sub hac conditione $\int M \frac{y^{N+\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} dy$ non fuisset $= \frac{M}{M+\frac{3}{2}} \cdot \frac{y^{N+\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} +$ const. sed potius $= \frac{M}{b^{\frac{1}{2}}}$. log. nat. y, ita ut iterum pro $y = 0$ terminus $\int M \frac{y^{N+\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}} dy = -\infty$ existeret, nam log. nat. o est $= -\infty$.

In universum, ut jam monui, numerus N ejusmodi esse non potest, ut cujuscunque termini, e. g.

$$\int \frac{1.3\ldots\ldots(2r-3)}{2^{r-1}.\ 1.2\ldots(r-1)} M \frac{y^{N+r-\frac{1}{2}}}{b^{r-\frac{1}{2}}} dy$$

seriei supra propositae exponens τοῦ y, i. e. $(N+r-\frac{1}{2})$, $= -1$ sit; etenim hac conditione esset

$$\int \frac{1.3\ldots\ldots(2r-3)}{2^{r-1}\,.\,1.2\ldots(r-1)}\, M\, \frac{y^{N+r-\frac{1}{2}}}{b^{r-\frac{1}{2}}}\, dy =$$

$\dfrac{1.3\ldots\ldots(2r-3)}{2^{r-1}\,.\,1.2\ldots(r-1)} \cdot \dfrac{M}{b^{r-\frac{1}{2}}}$. log. nat. y, itaque pro $y=o$ terminus ille iterum valorem infinite magnum acquireret.

Sed pro omnibus valoribus, qui numero N revera substitui possunt, et qui, ut demonstravi, intra fines $-\frac{3}{2}$ et $+\infty$ versantur, cuncti seriei propositae termini evanescunt, si $y=o$ ponimus, unde sequitur, ut sit

$$\int^{y=0} \frac{P}{\sqrt{y}}\left(\frac{b}{y}-1\right)^{-\frac{1}{2}} dy = \text{Const., et}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{4g}}\left\{\int^{y=b} \frac{P}{\sqrt{y}}\left(\frac{b}{y}-1\right)^{-\frac{1}{2}} dy - \text{Const.}\right\}.$$

Itaque si nunc in ultima serie, supra explicata, ponimus $y=b$, inveniemus pro generali evolutae quantitatis

$$\int^{y=b} \frac{P}{\sqrt{y}}\left(\frac{b}{y}-1\right)^{-\frac{1}{2}} dy \text{ termino hanc formulam:}$$

$$M\left\{\frac{1}{N+\frac{3}{2}}\, b^{N+1} + \frac{\frac{1}{2}}{N+\frac{5}{2}}\, b^{N+1} + \frac{1.3\;.\;b^{N+1}}{2.2.1.2\,(N+\frac{7}{2})} + \ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1.3.5\ldots(2r-3)\;.\;b^{N+1}}{2^{r-1}\,.\,1.2\ldots(r-1)(N+r+\frac{1}{2})} + \ldots\right\} + \text{Const., sive}$$

$$M\,.\,b^{N+1}\left\{\frac{1}{N+\frac{3}{2}} + \frac{1}{2(N+\frac{5}{2})} + \frac{1.3}{2.2.1.2\,(N+\frac{7}{2})} + \right.$$

$$\left.\ldots\ldots + \frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-3)}{2^{r-1}\,.\,1.2\ldots(r-1)(N+r+\frac{1}{2})} + \ldots\ldots\right\} + \text{Const.}$$

Ergo nunc loco M et N sensim positis numeris $m, n;\ m_1\, n_1,\ m_2 n_2$, et omnibus aliis cunctos evolutionis integrae integralis

$$\int^{y=b} \frac{P}{\sqrt{y}}\left(\frac{b}{y}-1\right)^{-\frac{1}{2}} dy - \text{Const.}$$

terminos obtinemus. Quae evolutio, si ea qua par est forma imbuitur, haec est

$$\int^{y=b} \frac{P}{\sqrt{y}}\left(\frac{b}{y}-1\right)^{-\frac{1}{2}} dy - \text{Const.} = t\sqrt{4g} =$$

$$m b^{n+1}\left\{\frac{1}{n+\frac{3}{2}} + \dots \frac{1.3.....(2r-3)}{2^{r-1}.1.2....(r-1)(n+r+\frac{1}{2})} + \dots\right\}$$

$$+ m_1 b^{n_1+1}\left\{\frac{1}{n_1+\frac{3}{2}} + \dots \frac{1.3.5.....(2r-3)}{2^{r-1}.1.2....(r-1)(n_1+r+\frac{1}{2})} + \dots\right\}$$

$$+ m_2 b^{n_2+1}\left\{\frac{1}{n_2+\frac{3}{2}} + \dots \frac{1.3.5.....(2r-3)}{2^{r-1}.1.2....(r-1)(n_2+r+\frac{1}{2})} + \dots\right\}$$

$$+ m_3 b^{n_3+1}\left\{\frac{1}{n_3+\frac{3}{2}} + \dots \frac{1.3.5.7.....(2r-3)}{2^{r-1}.1.2....(r-1)(n_3+r+\frac{1}{2})} + \dots\right\}$$

Secundum quaestionis nostrae sententiam quantitas t omnino pro constante habenda est, idque pro quocunque valore, quem forte lineae b assignare volumus. Quae quum ita sint, aliter fieri nequit, quam ut aequatio, quam modo assecuti sumus, si in ea quantitatem b respiciamus, tatis sit, qualis, ut ita dicam, identica nominatur. Unde sequitur, ut omnium eorum aequationis nostrae terminorum, qui eadem dignitate τοῦ b sint ornati, summa evanescat. Sed jam in evolutione nostra cuncti termini, eandem semper dignitatem numeri b continentes, excepta dignitate ordinis o, ad unum terminum, summae omnium aequalem, reducti sunt. Ergo necesse est, omnes numeri coefficientes terminorum, eadem dignitate numeri b (excepta dignitate ordinis o) ornatorum, omnino evanescant. Cujus sententiae ubertatem ut satis percipiamus, consideremus terminum generalem

$$M b^{N+1}\left\{\frac{1}{N+\frac{3}{2}} + \frac{1}{2(N+\frac{5}{2})} + \dots\right\},$$

cujus numerus coëfficiens, $M\left\{\frac{1}{N+\frac{3}{2}}+\dots\right\}$, ut modo exposuimus, $= o$ esse debet, (excepto casu ubi $[N+1]=o$). Quantitas autem in uncinis posita evanescere non potest, quum singuli ejus termini affirmatione sint ornati, numerus enim N, si realem ejus valorem spectas, major esse debet quam $(-\frac{3}{2})$, ut jam demonstravi. Itaque necessario erit $M=o$ pro quocunque valore numeri N [excepto quidem valore (-1)].

Neque sententia alia est quam haec: quod explicatio functionis $\frac{P}{\sqrt{y}}$ ex uno tantum termino my^{-1} constat, ubi valor numeri coefficientis m ex hac aequatione deduci potest

$$t\sqrt{4g} = m \cdot b^0 \left\{ \frac{1}{1/2} + \frac{1}{2(3/2)} + \frac{1.3}{2.2.1.2.\,5/2} + \frac{1.3.5}{2.2.2.1\,2.3.\,7/2} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2r-3)}{2^{r-2}.1.2\ldots(r-1)(2r-1)} + \ldots \right\}$$

Significemus $\left\{ \frac{1}{1/2} + \frac{1}{2(3/2)} + \ldots \right\}$ litera φ et $\frac{\sqrt{4g}}{\varphi}$ litera B, erit $m = Bt$; numerus igitur m constantem habet rationem ad t. —

Inventa hoc modo functione $\frac{P}{\sqrt{y}}$ non amplius difficile erit, formam quoque functionis f repertu.

Primo aequationem habemus $P = my^{-1/2}$ sive

$$\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}} = my^{-1/2}, \text{ sive } \left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\} = \frac{m^2}{y},$$

quae, functione $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ litera p notata, in hanc abit $y = \frac{m^2}{1+p^2}$; itaque, quum sit $x = \int p\,dy = py - \int y\,dp$, erit:

$$x = py - \int \frac{m^2}{1+p^2}\,dp = py - m^2 \,.\, \text{arc. (tang.} = p) + \text{const.}$$

Relinquitur etiam eliminatio literae p inter aequationes has:

$$y = \frac{m^2}{1+p^2};$$

$$x = py - \int \frac{m^2}{1+p^2}\,dp = \left\{ py - m^2 \,.\, \text{arc.(tang.} = p) + \text{const.} \right\}$$

quarum prior in hanc abit: $p = \sqrt{\left(\frac{m^2}{y} - 1\right)}$, quo valore in altera aequatione substituto, invenimus lineae curvae quaesita hanc aequationem

$$x = \sqrt{(m^2 y - y^2)} - m^2 \,.\, \text{arc. (tang.} = \sqrt{\left(\frac{m^2}{y} - 1\right)} + \text{const.}$$

Sed quum sit

$$\text{arc.}\left(tg = \sqrt{\left(\frac{m^2}{y} - 1\right)}\right) = \text{arc.}\left(\sin.^2 = 1 - \frac{y}{m^2}\right) =$$

$$\text{arc.}\left(1 - 2\sin.^2 = -1 + \frac{2y}{m^2}\right) = \tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\left(\cos. = -1 + \frac{2y}{m^2}\right) =$$

$$\tfrac{1}{2}\left\{\pi - \text{arc.}\left(\cos. = 1 - \frac{2y}{m^2}\right)\right\} = \tfrac{1}{2}\,\pi - \tfrac{1}{2}\text{arc.}\left(\sin.\,\text{vers.} = \frac{y}{\tfrac{1}{2}m^2}\right)$$

erit:

$$x = \sqrt{(2\,.\,\tfrac{1}{2}m^2y - y^2)} + \tfrac{1}{2}m^2\,.\,\text{arc.}\left(\sin.\,\text{vers.} = \frac{y}{\tfrac{1}{2}m^2}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}\,m^2\,\pi + \text{const.};$$

quum autem pro $y = o$ simul $x = o$ esse debeat, erit

$(-\tfrac{1}{2}m^2\pi + \text{const.}) = o$; itaque

$$x = \sqrt{(2\,.\,\tfrac{1}{2}\,m^2y - y^2)} + \tfrac{1}{2}m^2.\,\text{arc.}\left(\sin.\text{vers.} = \frac{y}{\tfrac{1}{2}m^2}\right).$$

Haec aequatio ad cycloïden pertinet, cujus circuli, ut ita dicam, generantis sive fundamentalis radius $a = \tfrac{1}{2}m^2$ est, quaeque in fugura indicatum situm ad lineas coordinatas versus habet. Linea BC, quae parallelos est HR, pro via circuli generantis haberi potest et aequalis est hujus circuli circumferentiae, ita ut distantia parallelarum BC et HR aequalis sit AK, diametro circuli generantis $= 2a = m^2$. Cujus circuli radium facile est inventu, determinato tempore t; nam quum $m = Bt$ invenerimus, erit $a = \tfrac{1}{2}\,B^2t^2 = \frac{2g}{\varphi^2}\,.\,t^2$; et vice versa, dato radio a, dimidium vibrationis tempus patebit: $t = \sqrt{\frac{a}{2g}}\,.\,\varphi$: neque difficile est monstratu, quantitatem φ esse numero π Ludolphi de Ceuln aequalem, ita ut sit: $t = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2a}{g}}$, cujus expressionis valor quoque aequalis est dimidio vibrationis tempori penduli, cujus longitudo est $= 4\,a = AL$.

Constat enim, posito $v = \sin.u$, sive $u = \text{arc.}(\sin. = v)$, esse

$$u = v + \frac{1.v^3}{2.3} + \frac{1.3.v^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.v^7}{2.4.6.7} + \ldots.$$
$$\ldots\ldots + \frac{1.3\ldots.(2r-3)\,v^{2r-1}}{2^{r-1}.1.2\ldots(r-1)\,.\,(2r-1)} + \ldots\ldots$$

unde derivatur pro $v = 1$: arc. (sin. $= 1$) sive

$$\frac{\pi}{2} = \left\{1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. \ldots\ldots + \frac{1.3\ldots.(2r-3)}{2^{r-1}.1.2\ldots(r-1).(2r-1)} + \ldots\ldots \right\};$$ itaque

$$\pi = \left\{\frac{1}{1/2} + \frac{1}{2.3/2} + \frac{1.3}{2.4.5/2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7/2} + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. \ldots\ldots + \frac{1.3.5\ldots.(2r-3)}{2^{r-2}.1.2\ldots(r-1).(2r-1)} + \ldots, \right\}$$ sive

$$\pi = \left\{\frac{1}{1/2} + \frac{1}{2.3/2} + \frac{1.3}{2.2.1.2.5/2} + \frac{1.3.5}{2.2.2.1.2.2.7/2} + \right.$$

$$\left. \ldots\ldots + \frac{1.3.5.7\ldots.(2r-3)}{2^{r-2}.1.2\ldots(r-1).(2r-1)} + \ldots. \right\}.$$

Sed quum hanc seriem supra litera φ notaverimus, sequitur, ut sit

$$\varphi = \pi.$$

CORRIGENDA.

Pag.	23	lin.	15	pro	„$mA > mC$ et $nB < nD$“	lege	„$mA > nB$ et $mC < nD$.“
—	23	—	22	—	„$mA > mC$, dum $nB < nD$“	—	„$mA > nB$, dum $mC < nD$.“
—	32	—	16	—	„Suppositio“	—	„Propositio.“
—	40	—	34	—	„gravitatis“	—	„ponderis.“
—	42	—	34	—	„mobils“	—	„mobilis.“

VITA.

Natus sum Gustavus Adolphus Ricardus Maywald, fidei evangelicae addictus, a. 1817 Id. Febr. Leutheni, pago Silesiae inferioris prope Neoforum sito, patre Godofredo, qui oratoris sacri munere fungitur et matre Friderica e gente Steigiana anno 1825 morte mihi erepta. A patre, qui prima litterarum elementa me docuit, anno 1827 Vratislaviam missus primum scholam, cui tunc praeerat Eggelingius, deinde, anno 1828, Gymnasium Elisabetanum frequentavi, ubi per septem annos lectionibus intereram praeceptorum optimorum, quibus omnibus gratias quam maximas ago, easque prae ceteris Reichio, hujus gymnasii rectori, et Kletkio: quorum duumvirorum lectiones praecipue mathematicae et physicae tantum mihi harum scientiarum amorem excitaverunt, ut mox iis plane me dedicarem. Itaque cum testimonio maturitatis ab hoc gymnasio dimissus a. d. X Kal. Maj. a. 1835, Rectore Magnifico Viro Cl. Unterholznero, in numerum civium hujus Universitatis Viadrinae receptus et ab Amplissimi Philosophorum Ordinis Decano Viro Cl. Schneidero Philosophiae studiosis adscriptus sum. Materia ibi ad ingenium excolendum largissime proposita hoc modo usus sum. Frequentavi lectiones Virorum illustrissimorum et doctissimorum Branissii, Elvenichii de philosophicis, Wachleri, Kutzenii, Hildebrandi de historicis, Rohovskii, Bellmanni de philologicis, Hahnii et Hessii de theologicis rebus disputantium. Nec non audivi Glockerum mineralogiam, Frankenhemium meteorologiam, Koecherum calculum differentialem docentem et Kletkium de arte combinatorica disserentem. Sed maximas gratias debeo Viro Doctissimo Scholtzio, cujus

scholae rerum mathematicarum amori meo egregie satisfecerunt, cum idem summa perspicuitate non solum universam fere analysin altiorem mihi explicaverit, sed etiam totius optices analyticae atque astronomiae sphaericae, theoricae et physicae notitia me impertiverit. Praeterea Vir Cel. a Boguslavsky instrumenta astronomica cognoscendi iisque utendi largam mihi fecit copiam, ejusque audivi colloquia de rebus astronomicis instituta et lectiones de astronomia practica unum per annum frequentavi. Maxima vero cum voluptate interfui praestantissimis scholis Viri Cel. Doctissimi Pohlii de rebus universam physicen spectantibus ingeniosissime disputantis.

Neque id sine successu. Namque ad quaestionem physicam ab Amplissimo Philosophorum Ordine in annum h. s. XXXIX propositam — „colligantur et explicentur theoremata, quae primum a Galileo Galilei de motu corporum tam libere cadentium quam in planis inclinatis vel per arcus circuli descendentium et ascendentium tradita sunt" — solvendam animum applicavi, neque Ordo Amplissimus praemium mihi denegavit. Idibus Decbr. anni MDCCCXXXIX hanc almam litterarum sedem reliqui.

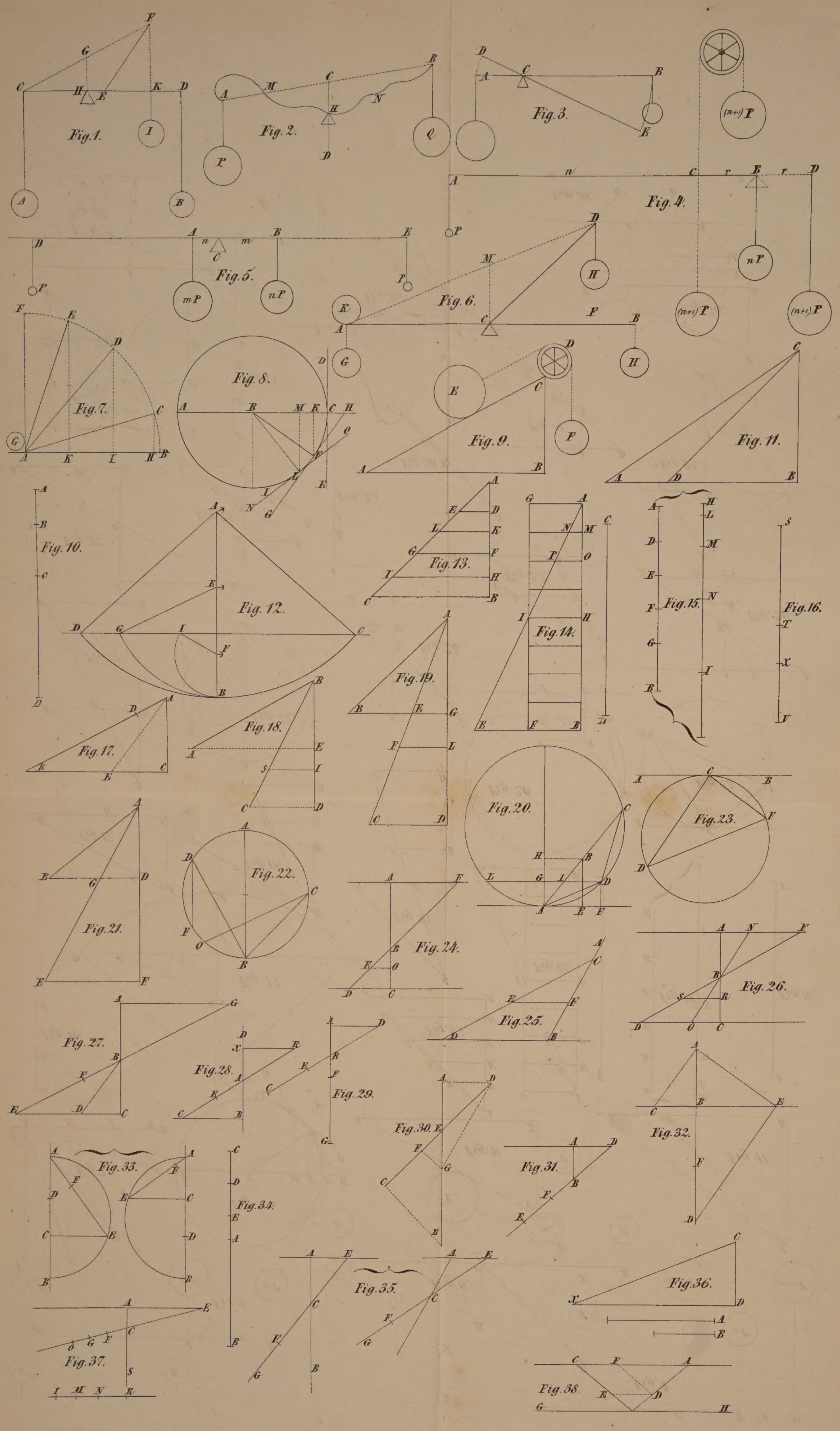
THESES.

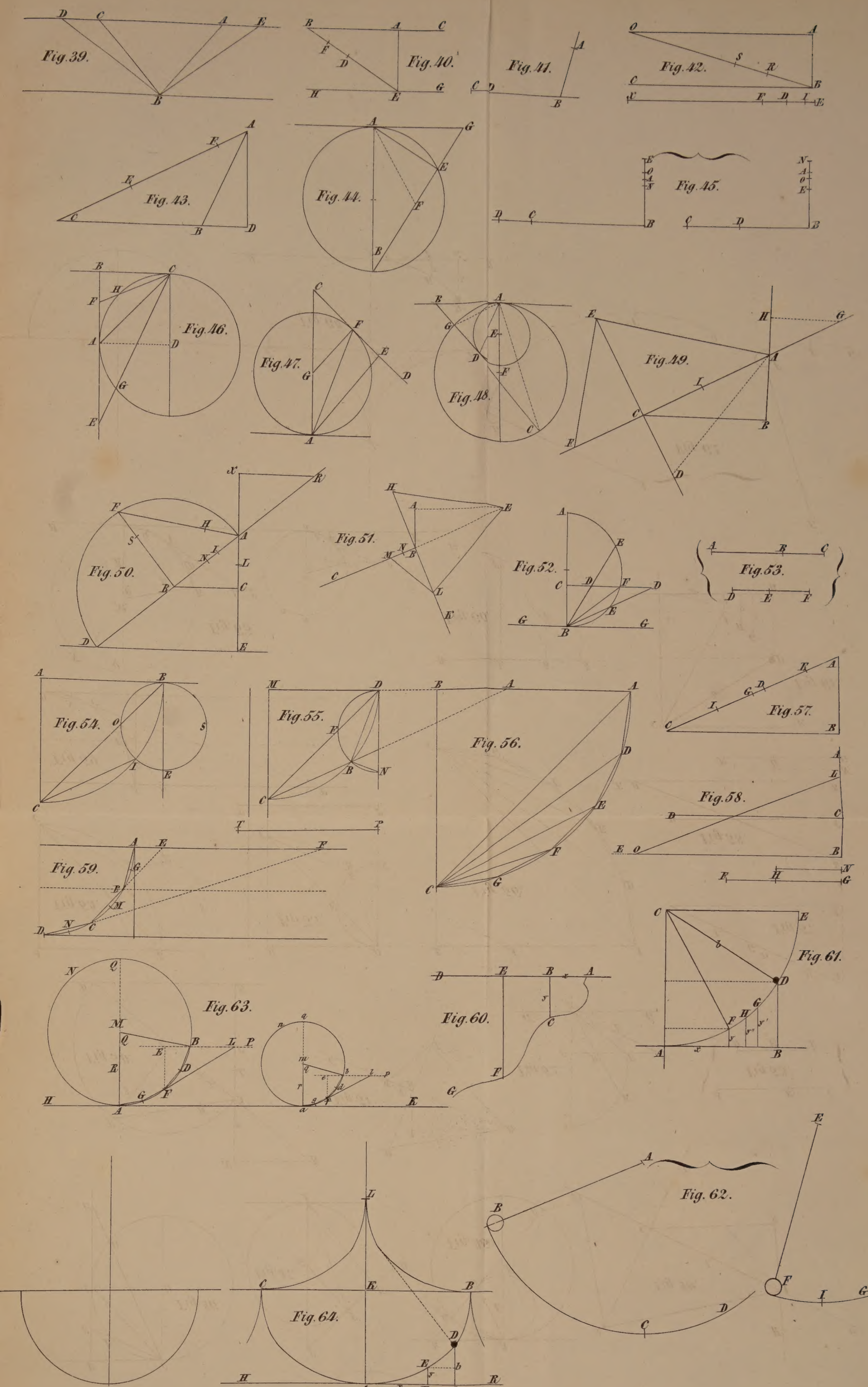
I. Logarithmus est functio algebraica.

II. Ex aequationibus $x^3 - 3x + 1 = 0$ et $a^3 - 3a + 1 = 0$ non sequitur $x = a$.

III. Tempus metiri non possumus nisi motu.

IV. Aberratio lucis theoria quam dicunt emanationis demonstrari non potest.


Fig.1.
Fig.2.
Fig.3.
Fig.4.
Fig.5.
Fig.6.
Fig.7.
Fig.8.
Fig.9.
Fig.10.
Fig.11.
Fig.12.
Fig.13.
Fig.14.
Fig.15.
Fig.16.
Fig.17.
Fig.18.
Fig.19.
Fig.20.
Fig.21.
Fig.22.
Fig.23.
Fig.24.
Fig.25.
Fig.26.
Fig.27.
Fig.28.
Fig.29.
Fig.30.
Fig.31.
Fig.32.
Fig.33.
Fig.34.
Fig.35.
Fig.36.
Fig.37.
Fig.38.


Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.